Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 12

56. Den Erwartungswert $Eg(X)$ einer bekannten Funktion g kann man aufgrund unabhängiger Beobachtungen $X_1, \dots, X_n$ sowohl mit dem empirischen Schätzer als auch mit dem geglätteten empirischen Schätzer, also mit

$$\mathbb{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbb{G}} = \int g(x) \hat{f}(x)\, dx,$$

schätzen. Hier ist $\hat{f}$ zum Beispiel ein geeigneter Kernschätzer der Dichte der zugrundeliegenden Verteilung. Geben Sie Bedingungen an, unter denen beide Schätzer asymptotisch äquivalent sind, das heißt $n^{1/2}(\hat{\mathbb{G}} - \mathbb{G}) = o_p(1)$. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung.

57. Seien $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Seien $X_1, \dots, X_n$ identisch verteilt und $Y_1, \dots, Y_n$ identisch verteilt mit möglicherweise unterschiedlichen Verteilungen und endlichen zweiten Momenten.

Geben Sie einen Test zum asymptotischen Niveau α für die Hypothese $EX = EY = 0$ gegen $EX < EY$ an.

Was machen Sie, wenn die beiden Stichprobenumfänge verschieden sind?

58. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit unbekannter Verteilung. Wie können Sie folgende Hypothese testen?

a) Die Verteilung ist symmetrisch um 0.

b) Die Verteilung ist symmetrisch.

59. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit unbekannter Verteilung. Wie können Sie folgende Hypothese testen?

a) Die Verteilung ist eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$.

b) Die Verteilung ist eine Gleichverteilung.

60. Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren. Wie können Sie testen, ob X_i unabhängig von Y_i ist?

Wie können Sie den Test verbessern, wenn Sie die Verteilungen von X_i und Y_i kennen?