Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **Wintersemester 2006/2007**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 1

Die *charakteristische Funktion* φ_X eines Zufallsvektors X ist definiert durch $\varphi_X(t) = E\exp(it^\top X)$.

Es gilt folgende mehrdimensionale Version des Stetigkeitssatzes für charakteristische Funktionen.
a) Gilt $X_n \Rightarrow X$, dann gilt $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ punktweise.
b) Hat φ_{X_n} einen punktweisen Limes φ, und ist φ stetig in 0, so gibt es einen Zufallsvektor X mit $X_n \Rightarrow X$ und $\varphi = \varphi_X$.

Sei μ ein k-dimensionaler Vektor und Σ eine positiv definite $k \times k$ Matrix. Die *k-dimensionale Normalverteilung* $N_{\mu,\Sigma}$ mit Mittelwertvektor μ und Kovarianzmatrix Σ hat die Dichte

$$p_{\mu,\Sigma}(x) = (2\pi)^{-k/2}(\det\Sigma)^{-1/2}\exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top\Sigma^{-1}(x-\mu)\Big).$$

Es gilt folgende mehrdimensionale Version des zentralen Grenzwertsatzes. Sind $X, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren mit Mittelwertvektor $\mu = EX$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = E(X-\mu)(X-\mu)^\top$, dann gilt

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \Rightarrow N_{\mu,\Sigma}.$$

1. (*Cramér und Wold.*) Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ k-dimensionale Zufallsvektoren. Es gilt $X_n \Rightarrow X$ genau dann, wenn $a^\top X_n \Rightarrow a^\top X$ für alle $a \in \mathbb{R}^k$.

2. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ i.i.d., und für $j = 1, \ldots, k$ seien h_j reellwertige Funktionen mit $Eh_j(X) = 0$ und $Eh_j^2(X) < \infty$. Seien T_{nj} *asymptotisch lineare* Schätzer für t_j mit *Einflußfunktion* $h_j(X)$:

$$n^{1/2}(T_{nj} - t_j) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h_j(X_i) + o_p(1).$$

Zeigen Sie mit $T_n = (T_{n1}, \ldots, T_{nk})^\top$, $t = (t_1, \ldots, t_k)^\top$, $h = (h_1, \ldots, h_k)^\top$:
a) Die Schätzer T_n sind asymptotisch linear für t mit Einflußfunktion h:

$$n^{1/2}(T_n - t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h(X_i) + o_p(1).$$

b) Hat $\Sigma = Eh(X)h(X)^\top$ eine von 0 verschiedene Determinante, so gilt $n^{1/2}(T_n - t) \Rightarrow N_{0,\Sigma}$.

3. In der Situation der vorigen Aufgabe sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ mit stetigen partiellen Ableitungen in t.
a) Zeigen Sie, daß $f(T_n)$ asymptotisch linear ist.
b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der $n^{1/2}(f(T_n) - f(t))$ asymptotisch normal (mit nicht ausgearteter Kovarianzmatrix) ist.

4. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Seien S_n, T_n reellwertige Schätzer für t mit Einflußfunktionen $g(X)$, $h(X)$, so daß $Eg(X) = Eh(X) = 0$ und $\sigma^2 = Eg^2(X) = Eh^2(X) < \infty$ gilt. Dann ist das arithmetische Mittel $(S_n + T_n)/2$ asymptotisch nicht schlechter als S_n oder T_n. Wie gut kann es werden?

5. Wie ist $\log dN^n_{n^{-1/2}t,1}/dN^n_{0,1}$ verteilt?