

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 4

16. (*Komponentenweise Effizienz impliziert verbundene Effizienz.*)

Sei P_{na} , $a \in A$, lokal asymptotisch normal in a . Für $j = 1, \dots, m$ seien $\kappa_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in a mit kanonischem Gradienten g_{0j} , und $\hat{\kappa}_j$ reguläre und effiziente Schätzer für κ_j in a . Dann ist $\hat{\kappa} = (\hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_m)^\top$ regulär und effizient für $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)^\top$ in a und asymptotisch linear mit Einflußfunktion $g_0 = (g_{01}, \dots, g_{0m})^\top$.

17. Sei \mathcal{P} die Familie der Verteilungen auf \mathcal{B} mit endlichem vierten Moment. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $\kappa(P)$ die Varianz von P . Zeigen Sie, daß κ differenzierbar ist, und bestimmen Sie den (kanonischen) Gradienten und einen effizienten Schätzer für κ .

18. Sei $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ \mathcal{F} -meßbar und \mathcal{P} die Familie der Verteilungen auf \mathcal{F} , für die $h \in L_{2,0}^m(P)$ und Phh^\top positiv definit ist. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2^k(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P , den kanonischen Gradienten von $\kappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf .

19. Seien T_1, \dots, T_m meßbare Transformationen auf Ω . Sei \mathcal{P} die Familie der Verteilungen auf \mathcal{F} , die unter T_1, \dots, T_m invariant sind. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P , den kanonischen Gradienten von $\kappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf .

20. Sei \mathcal{P} die Familie der um 0 symmetrischen Verteilungen auf \mathcal{B} . Seien X_1, \dots, X_n unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P , den kanonischen Gradienten von $\kappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf .