Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **Wintersemester 2006/2007**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 6

26. *(M-Schätzer im i.i.d.-Fall.)*
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Beobachtungen mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Für $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ sei ψ_ϑ eine meßbare Funktion auf Ω. Das *M-Funktional* $\vartheta(P)$ ist die Lösung der Gleichung $P\dot{\psi}_\vartheta = 0$. Sei P fest und der lokale Parameterraum K dicht in $L_{2,0}(P)$. Berechnen Sie (heuristisch) den (kanonischen) Gradienten von $\vartheta(P)$.

27. *(Der kanonische Gradient einer parametrischen Markov-Kette.)*
Seien $X_0, \dots, X_n$ Beobachtungen einer Markov-Kette mit Übergangsverteilung Q_ϑ, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Für ein festes ϑ sei die Kette positiv Harris-rekurrent, $\vartheta_{nt} = \vartheta + n^{-1/2}t$, die Folge $Q_{\vartheta_{nt}}$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_\vartheta$ und

$$\int ((d\pi_{\vartheta_{nt}}/d\pi_\vartheta)^{1/2} - 1)^2 \, d\pi_\vartheta \to 0.$$

Dann ist das Modell lokal asymptotisch normal in ϑ. Berechnen Sie den kanonischen Gradienten von ϑ.

28. *(Maximum-Likelihood-Schätzer für Markov-Ketten.)*
Übertragen Sie das Resultat über die asymptotische Linearität von Maximum-Likelihood-Schätzern für i.i.d. Beobachtungen auf Markov-Ketten. Es ergibt sich, daß der Maximum-Likelihood-Schätzer effizient ist.

29. *(Reversible Markov-Ketten.)*
Für eine Markov-Kette mit Übergangsverteilung Q und invarianter Verteilung π ist die *umgekehrte* Übergangsverteilung Q^- definiert durch

$$\pi(dx)Q(x, dy) = \pi(dy)Q^-(y, dx).$$

Die Kette heißt *reversibel*, wenn $Q^- = Q$ gilt. Was bedeutet das für die Verteilung $\pi \otimes Q$? Wie können Sie dann den Schätzer $(1/n)\sum_{i=1}^n f(X_{i-1}, X_i)$ verbessern?

30. *(Paarweise Beobachtungen.)*
Sei $X_0, X_1, \dots$ eine Markov-Kette mit Übergangsverteilung Q und invarianter Verteilung π. Ist $(X_0, X_1), (X_2, X_3), \dots$ eine Markov-Kette? Was ist ihre Übergangsverteilung und ihre invariante Verteilung?