

Übungen zur Einführung in die Stochastik  
Serie 5

Abgabe: Montag, 19. November 2007, vor der Vorlesung

**21.** Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie das richtige von  $n$  Zeichen auf einer Tastatur treffen, sei  $p$ . Alle falschen Zeichen treffen Sie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Wenn Sie einen Buchstaben geschrieben haben, wie wahrscheinlich ist es, dass Sie ihn auch schreiben wollten?

**22.** Eine Urne enthält  $n$  verschiedenfarbige Kugeln; eine davon ist weiß. Eine Kugel wird gezogen, und zwei unabhängige Beobachter teilen uns ihre Farbe mit. Leider nennt jeder von ihnen in neun von zehn Fällen eine falsche Farbe. Wenn beide behaupten, dass die gezogene Kugel weiß ist, wie wahrscheinlich ist es, dass sie die Wahrheit sagen?

**23.** Ein Gerät bestehe aus zwei Bauteilen  $T_1$  und  $T_2$ , die in Reihe angeordnet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil  $T_1$  bzw.  $T_2$  während einer bestimmten Zeitdauer intakt bleibt, sei  $p_1$  bzw.  $p_2$ . Ein (Teil-) System aus hintereinander geschalteten Bauteilen fällt aus, wenn eines der beiden Bauteile ausfällt. Die Zuverlässigkeit des Systems soll durch das Hinzuschalten gleichartiger Bauteile  $T'_1$  und  $T'_2$  erhöht werden. Dazu kommen zwei Methoden in Frage:

*Methode 1:* Zu dem System wird ein identisches System parallelgeschaltet.

*Methode 2:* Zu jedem Bauteil wird ein identisches Bauteil parallelgeschaltet. Man vergleiche die beiden Methoden, indem man die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass das unter Methode 1 bzw. 2 beschriebene Gerät während der festgelegten Zeitdauer intakt bleibt.

**24.** (*Sortieren durch Einfügen*) Ein Feld der Länge  $n$  enthalte die Elemente  $1, \dots, n$  in beliebiger Reihenfolge. Sie sollen der Größe nach sortiert werden. Dazu wird im ersten Schritt das zweite Element mit dem ersten verglichen; wenn nötig, werden beide vertauscht. Allgemein wird im  $(k-1)$ -ten Schritt das  $k$ -te Element mit den vorhergehenden  $k-1$  Elementen verglichen und dort durch sukzessive Vergleiche mit den vorhergehenden richtig einsortiert. Berechnen Sie für  $n=3$  die erwartete Anzahl der *Umsortierungen*, also der Schritte, bei denen das Element tatsächlich verschoben werden muss.

**25.** Gegeben sei eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$ . Zeigen Sie, dass diese abgeschlossen ist unter Differenzen, symmetrischen Differenzen, abzählbaren Durchschnitten und endlichen Vereinigungen und Durchschnitten.