Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2007/2008**

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 6
Abgabe: Montag, 26.November 2007, vor der Vorlesung

26. (*Stetigkeit von Maßen*) Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Sind nun $A, A_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit der Eigenschaft $A_n \uparrow A$, so gilt

$$PA_n \xrightarrow{n\to\infty} PA.$$

Hinweis: Die Notation $A_n \uparrow A$ bedeutet $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$.

27. a) Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die offenen Mengen aus $\mathbb{R}^m$ in $\mathcal{B}^m$ enthalten sind.
b) Sei nun speziell $m = 2$. Zeigen Sie dann, dass abgeschlossene Kreisscheiben Borel-messbar sind, und folgern Sie mit a), dass auch die Kreisränder in $\mathcal{B}^2$ enthalten sind. Beweisen Sie anschließend, dass die Kreisränder Lebesgue-Maß 0 haben.
Bemerkung zu a): Wenn $\mathcal{O}_m$ das System der offenen Mengen aus $\mathbb{R}^m$ bezeichnet, gilt sogar $\mathcal{B}^m = \sigma(\mathcal{O}_m)$. Wir sehen also, dass die Borel-Algebra auch andere Erzeugendensysteme besitzt als die in der Vorlesung angegebenen.

28. Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$ Mengen mit σ-Algebren, und sei $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Falls nun gilt $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{S})$ und $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ für alle $S \in \mathcal{S}$, so ist X messbar.

29. Stetige Funktionen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ sind messbar, wenn die beiden Grundräume mit den Borel-Algebren versehen werden.

30. Sind X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$, so auch $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\liminf_{n\to\infty} X_n$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$ und $\lim_{n\to\infty} X_n$ (sofern letztere existieren und reellwertig sind).