MUSTERLÖSUNG ZU BLATT 8

Aufgabe 36:

a) Sei $X \sim N_{\mu,\sigma^2}$, d.h. X hat die Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. In den Rechnungen wird an den mit „Ⓢ" gekennzeichneten Stellen die Substitution $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $dy = \frac{1}{\sigma}dx$ benutzt. Da $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1. \tag{1}$$

Wer diese Eigenschaft nicht benutzen will, der kann das einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi.\end{aligned}$$

Nun zur Berechnung des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &\overset{Ⓢ}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=:A} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Für den Term A kann man benutzen, daß die Funktion $h : y \mapsto y e^{-\frac{y^2}{2}}$ die Eigenschaft $h(-y) = -h(y)$ besitzt. Daher gilt

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0. \tag{2}$$

Alternativ kann man verwenden, daß die Funktion $y \mapsto y e^{-\frac{y^2}{2}}$ die Stammfunktion $-e^{-\frac{y^2}{2}}$ besitzt. Auf diese Weise folgt ebenfalls $A = -e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Insgesamt erhält man also

$$EX \overset{(1),(2)}{=} \mu.$$

Für das zweite Moment rechnet man:

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{Ⓢ}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=:I} + 2\mu\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Der mit I bezeichnete Term läßt sich mit partieller Integration umformen zu

$$I = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot (-y)e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Da die Exponentialfunktion stärker wächst als jede Potenz, ist der erste Term gleich Null. Mit (1) folgt, daß $I = \sigma^2$. Mit (1) und (2) ergibt sich also

$$E\left(X^2\right) = \sigma^2 + \mu^2.$$

Demnach gilt für die Varianz

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

b) Benutze an den mit * gekennzeichneten Stellen die Substitution $y = \frac{x}{a}$, $dy = \frac{1}{a}dx$ und an den mit ** gekennzeichneten Stellen die Eigenschaft $\Gamma(b+1) = b\Gamma(b)$.

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{a^b\Gamma(b)} \cdot x^{b-1}e^{-\frac{x}{a}}dx = \frac{1}{a^b\Gamma(b)} \int_0^{\infty} x^b e^{-\frac{x}{a}}dx \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{a^b\Gamma(b)} \int_0^{\infty} (ay)^b e^{-y} a dy = \frac{a}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} y^{(b+1)-1}e^{-y}dy \\ &= \frac{a}{\Gamma(b)} \cdot \Gamma(b+1) \overset{**}{=} \frac{a}{\Gamma(b)} \cdot b\Gamma(b) = ab. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{a^b\Gamma(b)} \cdot x^{b-1}e^{-\frac{x}{a}}dx = \frac{1}{a^b\Gamma(b)} \int_0^{\infty} x^{b+1} e^{-\frac{x}{a}}dx \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{a^b\Gamma(b)} \int_0^{\infty} (ay)^{b+1} e^{-y} a dy = \frac{a^2}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} y^{(b+2)-1}e^{-y}dy \\ &= \frac{a^2}{\Gamma(b)} \cdot \Gamma(b+2) \overset{**}{=} \frac{a^2}{\Gamma(b)} \cdot (b+1)\Gamma(b+1) \\ &\overset{**}{=} \frac{a^2}{\Gamma(b)} \cdot (b+1)b\Gamma(b) = a^2b^2 + a^2b. \end{aligned}$$

Aus beiden Rechnungen ergibt sich die Varianz

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = a^2b^2 + a^2b - a^2b^2 = a^2b.$$

Aufgabe 37:
a) Benutze zur Berechnung der Verteilungsfunktionen die Äquivalenzen

(3) $$\min_{1\le i\le n} x_i > x \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n: \; x_i > x$$

und

(4) $$\max_{1\le i\le n} x_i \le x \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n: \; x_i \le x.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \le x) = P\left(\min_{1\le i\le n} X_i \le x\right) \\
&= 1 - P\left(\min_{1\le i\le n} X_i > x\right) \\
&\overset{(3)}{=} 1 - P(X_1 > x, \dots, X_n > x) \\
&\overset{unabh.}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \underbrace{P(X_i \le x)}_{=F(x)}\right) = 1 - (1 - F(x))^n.
\end{aligned}$$

Ähnlich ergibt sich

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= P(Z \le x) = P\left(\max_{1\le i\le n} X_i \le x\right) \\
&\overset{(4)}{=} P(X_1 \le x, \dots, X_n \le x) \\
&\overset{unabh.}{=} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{P(X_i \le x)}_{=F(x)} = (F(x))^n.
\end{aligned}$$

b) Da nach den Voraussetzungen aus Aufgabenteil b) gilt $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, ist F sogar differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$. Damit sind auch F_Y und F_z als Verkettungen differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Nach Satz 13.3 sind dann F'_Y bzw. F'_Z Dichten von Y bzw. Z. Man errechnet

$$f_Y(x) := F'_Y(x) = -n \cdot (1 - F(x))^{n-1} \cdot (-f(x)) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$$
$$f_Z(x) := F'_Z(x) = n(F(x))^{n-1} f(x).$$

Aufgabe 38:
Von den 1.000.000 Wählern sind noch $n = 999.000$ unentschieden. Sei Ω die Menge aller Wahlausgänge. Definiere für $\omega \in \Omega$

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls Wähler } i \text{ für A stimmt} \\ 0 & \text{, falls Wähler } i \text{ für B stimmt} \end{cases}.$$

Die Zufallsvariablen X_i sind offensichtlich $B_{1,p}$-verteilt und unabhängig. Nach Kapitel 11 ist die Zufallsvariable $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ also $B_{n,p}$-verteilt. Sie gibt an, wie viele unentschiedene Wähler für Kandidat A stimmen. Nach Aufgabe 33 gilt $ES_n = n{\cdot}p = 499.500$ und $Var(S_n) = np(1-p) = 249750$. Kandidat A hat eine Mehrheit, wenn er mehr als 500.000 Stimmen erreicht. Es fehlen ihm also noch mehr als 499.000

Stimmen. In der nun folgenden Rechnung sei Z eine $N_{0,1}$-verteilte Zufallsvariable.

$$\begin{aligned}
P(S_n > 499.000) &= P(S_n - np > -500) \\
&= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > -1\right) \\
&= P\left(n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right) > -1\right) \\
&\overset{ZGWS}{\approx} P(Z > -1) \\
&= 1 - P(Z \leq -1) \\
&= 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \overset{Tabelle}{\approx} 0,8413.
\end{aligned}$$

Kandidat A wird die Wahl also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 84% gewinnen.

Aufgabe 39:

a) Beh.: Wenn f stetig in μ ist, dann gilt $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to f(\mu)$ in W.

Beweis. Nach dem GGZ (Satz 14.7) und der Definition der stochastischen Konvergenz (Kapitel 16) gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu \ \text{ in W.}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig in μ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|x - \mu| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\mu)| < \varepsilon$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\left\{\left|f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - f(\mu)\right| \geq \varepsilon\right\} &\subset \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \delta\right\} \\
&\subset \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \frac{\delta}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Man erhält folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
0 &\leq P\left(\left|f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - f(\mu)\right| > \varepsilon\right) \\
&\leq P\left(\left|f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - f(\mu)\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \delta\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

b) Beh.: Wenn f stetig differenzierbar in μ ist, dann gilt

$$n^{1/2}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - f(\mu)\right) \Rightarrow N_{0,(f'(\mu))^2\sigma^2}.$$

Zusatz: Für obige Aussage reicht es aus, f lediglich als differenzierbar in μ vorauszusetzen.

Beweis. Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes (Satz 15.1) gilt

$$P\left(a < n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) < b\right) \xrightarrow{n\to\infty} N_{0,\sigma^2}(a,b) \quad \forall a<b.$$

Mit der absteigenden Stetigkeit des W-Maßes P erhalten wir

$$F_X(b)-F_X(a) = P\left(a < n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \leq b\right) \xrightarrow{n\to\infty} N_{0,\sigma^2}(a,b] \quad \forall a<b.$$

Für $a \to -\infty$ folgt daraus

$$F_X(b) \xrightarrow{n\to\infty} N_{0,\sigma^2}(-\infty,b] \quad \forall\, b\in\mathbb{R}.$$

Mit der Definition der schwachen Konvergenz (Kapitel 16) ergibt sich also

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \Rightarrow N_{0,\sigma^2}.$$

Dies ist die Aussage, die in der Literatur unter dem Stichwort „Zentraler Grenzwertsatz" angegeben wird. Zitiere nun für den ersten Teil den Beweis bzw. die Aussage von Bemerkung 16.6 mit $a_n = n^{1/2}$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ anstatt X_n und $c=\mu$.
Gehe für den Zusatz folgendermaßen vor:
Da f in μ differenzierbar ist, ist die Funktion

$$D\,:\,x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(\mu)}{x-\mu} & ,x\neq\mu \\ f'(\mu) & ,x=\mu \end{cases}$$

stetig in μ. Es gilt

$$n^{1/2}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-f(\mu)\right) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\cdot n^{1/2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right),$$

denn für die ω mit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)=\mu$ steht auf beiden Seiten Null, für die ω mit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\neq\mu$ gilt

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right) = \frac{f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)-f(\mu)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)-\mu}.$$

Durch eine Nullergänzung erhält man also

$$\begin{aligned} n^{1/2}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-f(\mu)\right) &= f'(\mu)n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \\ &\quad + \left(D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-f'(\mu)\right)n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu). \end{aligned}$$

Mit dem ZGWS (Satz 15.1) leitet man wie oben her

$$f'(\mu)n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \Rightarrow N_{0,(f'(\mu))^2\sigma^2}.$$

Insbesondere gilt nach Bemerkung 16.3

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = \mathcal{O}_p(1).$$

Außerdem folgt mit a)

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to f'(\mu) \quad \text{in W.},$$

d.h. $D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - f'(\mu) = o_p(1)$. Mit Beh. A.1 aus dem Anhang ergibt sich also

$$\left(D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - f'(\mu)\right) n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = o_p(1).$$

Die Behauptung folgt hieraus mit Lemma 16.4 (Slutsky). □

Aufgabe 40:
Beh.: Es gilt unter den genannten Voraussetzungen

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} \to e^{\frac{1}{e-1}} \quad \text{in W.}$$

Beweis. Schreibe

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\log\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i}.$$

Definiere $Y_i := \log X_i$. Dies sind weiterhin Zufallsvariablen, die unabhängig und identisch verteilt sind (vgl. Beh. A.2 im Anhang). Man errechnet

$$EY_1 = E\log X_1 = \int_1^e \log x \cdot \frac{1}{e-1}dx = \frac{1}{e-1}\,(x\log x - x)\big|_1^e = \frac{1}{e-1}.$$

Um das Gesetz der großen Zahlen anwenden zu können, muß man nachrechnen, daß die Varianz der Y_i endlich ist. Dazu reicht es schon zu zeigen, daß das zweite Moment endlich ist:

$$E(Y_1^2) = \int_1^e (\log x)^2 \cdot \frac{1}{e-1}dx = \frac{1}{e-1}\cdot\left(x(\log x)^2 - 2(x\log x - x)\right)\Big|_1^e = \frac{e-2}{e-1}.$$

Mit dem Gesetz der großen Zahlen (Satz 14.7) und der Definition der stochastischen Konvergenz (Kapitel 16) ergibt sich

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i \to \underbrace{E\log X_1}_{=\frac{1}{e-1}} \quad \text{in W.}$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt mit Aufgabe 39)a) bzw Prop. 16.5

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} \to e^{\frac{1}{e-1}} \quad \text{in W.}$$

□

Beh. A.1: Wenn $X_n = \mathcal{O}_p(1)$ und $Y_n = o_p(1)$, dann gilt $X_n Y_n = o_p(1)$.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $\varrho > 0$ beliebig. Nach Vorraussetzung existiert ein $c > 0$, so daß $P(|X_n| > c) < \frac{\varrho}{2}$ für *schließlich* alle n, d.h. es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_1$ gilt $P(|X_n| > c) < \frac{\varrho}{2}$. (Es kann sein, daß dieser Zusatz in der Vorlesung gefehlt hat.) Andererseits existiert nach Voraussetzung und der Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen ein $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_2$ gilt $P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{c}) < \frac{\varrho}{2}$. Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ kann man also abschätzen

$$
\begin{aligned}
& P(|X_nY_n| > \varepsilon) \\
= \quad & P(|X_nY_n| > \varepsilon, |X_n| \leq c) + P(|X_nY_n| > \varepsilon, |X_n| > c) \\
\leq \quad & P(|X_n| \cdot |Y_n| > \varepsilon, |X_n| \leq c) + P(|X_n| > c) \\
\overset{\{|X_n|\cdot|Y_n|>\varepsilon\}\subset\{c|Y_n|>\varepsilon\}}{\leq} \quad & P\left(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{c}, |X_n| \leq c\right) + P(|X_n| > c) \\
\leq \quad & P\left(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{c}\right) + P(|X_n| > c) \\
\overset{\text{s.o.}}{\leq} \quad & \frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho}{2} = \varrho.
\end{aligned}
$$

Mit der Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen erhält man

$$\forall \varepsilon > 0: \; P(|X_nY_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

was aber nach Kapitel 16 gleichbedeutend ist mit $X_nY_n = o_p(1)$. □

Beh. A.2: a) Sei X eine Zufallsvariable und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, dann ist auch $f \circ X$ eine Zufallsvariable.
b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen $(i = 1, \ldots, n)$, dann sind die Zufallsvariablen $f_i \circ X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ebenfalls unabhängig.

Beweis. a) Sei $B \in \mathcal{B}^1$ beliebig. Wegen

$$(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}\underbrace{\left(f^{-1}(B)\right)}_{\in \mathcal{B}^1} \overset{X \text{ ist ZV}}{\in} \mathcal{F}$$

ist $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar und damit eine Zufallsvariable.
b) Seien $B_1, \dots B_n \in \mathcal{B}^1$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
& P(f_1 \circ X_1 \in B_1, \dots, f_n \circ X_n \in B_n) \\
= \quad & P\left((f_1 \circ X_1)^{-1}(B_1) \cap \dots \cap (f_n \circ X_n)^{-1}(B_n)\right) \\
= \quad & P\left(X_1^{-1}\left(f_1^{-1}(B_1)\right) \cap \dots \cap X_n^{-1}\left(f_n^{-1}(B_n)\right)\right) \\
= \quad & P\left(X_1 \in f_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in f_n^{-1}(B_n)\right) \\
\overset{X_i \text{ unabhängig}}{=} \quad & \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in f_i^{-1}(B_i)\right) \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i^{-1}\left(f_i^{-1}(B_i)\right)\right) \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} P\left((f_i \circ X_i)^{-1}(B_i)\right) \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} P(f_i \circ X_i \in B_i).
\end{aligned}$$

Daher sind die Zufallsvariablen $f_i \circ X_i$ unabhängig. $\square$