Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2007/2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 8
Abgabe: Montag, 10.Dezember 2007, vor der Vorlesung

36. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen X in den folgenden Fällen:
a) $X \sim N_{\mu,\sigma^2}$, d.h. X ist normalverteilt,
b) $X \sim \Gamma_{a,b}$, d.h. X besitzt die Dichte

$$p_{a,b}(x) = \frac{1}{a^b\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-\frac{x}{a}} 1_{(0,\infty)}(x).$$

37. a) Seien $X_i, i = 1, \ldots, n$, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie

(i) die Verteilungsfunktion von $Y := \min_{1\leq i\leq n} X_i$,

(ii) die Verteilungsfunktion von $Z := \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

b) Sei zusätzlich vorausgesetzt, dass die Zufallsvariablen X_i eine Dichte f besitzen. Bestimmen Sie in diesem Fall die Dichten der Zufallsvariablen Y und Z, die wie in a) definiert sein sollen.

38. (*Die Macht entschlossener Minderheiten*) Eine Million Wähler müssen sich zwischen zwei Kandidaten A und B entscheiden. Eine Minderheit von tausend Wählern hat sich bereits für Kandidat A entschieden, die restlichen Wähler werfen eine (faire) Münze. Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kandidat A die Wahl gewinnen wird?

39. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit Mittelwert μ und endlicher Varianz σ^2.

a) Sei f stetig in μ. Dann konvergiert $f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)$ in Wahrscheinlichkeit gegen $f(\mu)$.

b) Sei f stetig differenzierbar in μ. Dann konvergiert $n^{1/2}(f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) - f(\mu))$ schwach gegen eine Normalverteilung.
Zusatz: Zeigen Sie, dass dazu f nur in μ differenzierbar sein muss.

40. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[1, e]$. Konvergiert $(\prod_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}$ in Wahrscheinlichkeit? Wenn ja, wogegen?