

Übungen zur Einführung in die Stochastik  
Serie 9

Abgabe: Montag, 17. Dezember 2007, vor der Vorlesung

**41.** Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und gleichverteilt auf  $(0, \vartheta)$  mit  $\vartheta > 0$ . Definiere  $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . Dann gilt:

- a)  $M_n$  ist konsistent für  $t(P) = \vartheta$ .
- b)  $n(\vartheta - M_n)$  konvergiert schwach gegen eine Zufallsvariable  $Z$ . Welche Verteilung hat sie?

**42.** Sei  $X$  die Anzahl der Unfälle in einer bestimmten Stadt in einer Woche. Wir betrachten  $X$  als Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Wir wollen aus der Beobachtung von  $X$  die Wahrscheinlichkeit schätzen, dass in den folgenden drei Wochen kein Unfall geschieht, also  $t(P) = (P(X = 0))^3$ . Zeigen Sie: Ist  $T$  erwartungstreuer Schätzer, so liefert  $T$  unsinnige Schätzwerte.

**43.** Seien  $(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unabhängige und identisch verteilte zweidimensionale Zufallsvektoren mit endlichen vierten Momenten  $E(X_1^4), E(Y_1^4)$ . Dann ist

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

ein konsistenter Schätzer für die Kovarianz von  $X$  und  $Y$ . Bestimmen Sie außerdem seine Einflussfunktion und seine asymptotische Varianz.

**44.** Seien  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unabhängige und identisch verteilt mit Dichte  $f$  und Verteilungsfunktion  $F$ . Die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}_n$  ist definiert durch:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(X_i \leq x)}.$$

Sei  $f$  stetig in  $x$ . Zeigen Sie, dass der geschätzte Differenzenquotient

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\hat{F}_n(x + b_n) - \hat{F}_n(x - b_n)}{2b_n}$$

ein konsistenter Schätzer für  $f(x)$  ist, wenn  $b_n \rightarrow 0$  und  $nb_n \rightarrow \infty$ .

**45.** Seien  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unabhängig und identisch verteilt mit einer Dichte  $f$ , die in  $x$  differenzierbar ist. Finden Sie einen konsistenten Schätzer für die Ableitung  $f'(x)$ .

**Einladung:** Die Fachschaft lädt zur Nikolausparty am 14.12. im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts ein. Beginn ist um 20 Uhr. Wie immer gibt es leckeres Kölsch und Glühwein gegen die Kälte.