Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik I
Serie 4
Abgabe: Dienstag, 6. Mai 2008, vor der Vorlesung

16. Für jede Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ einer Menge Ω in eine Menge Ω' und jedes Mengensystem $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ zeige man:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}')).$$

17. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein beliebiger Maßraum. Definiere für jedes $A \in \mathcal{F}$

$$\varepsilon_\omega(A) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

das sogenannte *Dirac-Maß* im Punkt ω. Seien weiterhin $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega$, $a_1, a_2, \ldots > 0$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Wann ist f bezüglich des Maßes $\mu := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varepsilon_{\omega_j}$ integrierbar? Berechnen Sie in diesem Fall μf.

18. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $\varphi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ aufsteigend. Dann ist $\varphi : ([0, \infty), \mathcal{B} \cap [0, \infty)) \to ((0, \infty), \mathcal{B} \cap (0, \infty))$ messbar. Für eine Borel-messbare Funktion f gilt zudem

$$\mu(|f| \geq a) \leq \frac{1}{\varphi(a)} \mu(\varphi \circ |f|).$$

19. Definition 1: Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt eine *μ-Nullmenge*, wenn $N \in \mathcal{F}$ und $\mu(N) = 0$ ist.
Definition 2: Es sei E eine Eigenschaft derart, dass für jeden Punkt $\omega \in \Omega$ definiert ist, ob ω diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Wir sagen „*μ-fast alle Punkte $\omega \in \Omega$ besitzen die Eigenschaft E*“ oder „*E gilt μ-fast überall auf Ω*“, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass alle Punkte $\omega \in N^c$ die Eigenschaft E besitzen.
Sei nun f eine nichtnegative Borel-messbare Funktion auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mu f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

20. a) Sind $f_1, f_2, \ldots$ nichtnegativ und Borel-messbar, so gilt

$$\mu \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu f_n.$$

b) Sei f eine Borel-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $|f|$ integrierbar ist.

c) Sind f und g Borel-messbar mit $|f| \leq g$, und ist g integrierbar, dann ist auch f integrierbar.