Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Sommersemester 2008**

Übungen zur Stochastik I
Serie 7
Abgabe: Dienstag, 3. Juni 2008, vor der Vorlesung

31. Sei $(X_1, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit λ^n-Dichte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h. die induzierte Verteilung $P^{(X_1,\dots,X_n)}$ ist stetig mit λ^n-Dichte f (vgl. Aufgabe 25). Dann hat jedes X_i eine λ^1-Dichte f_i. Außerdem sind in diesem Fall $X_1, \dots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn gilt $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$ für λ^n-fast alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Hinweise: 1. Es gilt $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}^1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}^1$ und $\lambda^n = \lambda^1 \otimes \ldots \otimes \lambda^1$ (mit jeweils n Faktoren).
2. Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und μ-integrierbare Funktionen f und g gilt:

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu \; \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow f \leq g \; \mu\text{-fast überall.}$$

32. Sei $p \geq 1$. Gelte $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit mit $X \in L_p$. Ferner gebe es ein $Y \in L_p$, so dass $|X_n| \leq Y$ für alle n. Dann gilt auch $X_n \to X$ in L_p.

33. Sind $X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen, so konvergiert die Folge $(X_n(\omega))$ für fast alle ω genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P\Bigg(\bigcup_{j,k \geq n} \{|X_j - X_k| > \varepsilon\} \Bigg) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

34. a) Wenn $X_n \to X$ in L_p und $Y_n \to Y$ in L_p für $p \geq 1$, dann auch $X_n + Y_n \to X + Y$ in L_p.

b) Seien $p > 1$ und $q = p/(p-1)$. Wenn $X_n \to X$ in L_p und $Y_n \to Y$ in L_q, dann gilt $X_n Y_n \to XY$ in L_1.

c) Wenn $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$ in Wahrscheinlichkeit, dann auch $X_n + Y_n \to X + Y$ und $X_n Y_n \to XY$ in Wahrscheinlichkeit.

35. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen.

a) Gilt $X_n \to X$ fast sicher, dann auch $f \circ X_n \to f \circ X$ fast sicher.

b) Gilt $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit, dann auch $f \circ X_n \to f \circ X$ in Wahrscheinlichkeit.