Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik I
Serie 8

Abgabe: Dienstag, 10. Juni 2008, vor der Vorlesung

36. (Ein Null-Eins-Gesetz) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Konstanten dergestalt, dass $c_nX_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, punktweise für alle ω aus einer Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit. Beweisen Sie:

a) $c_nX_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ f.s.

b) Für jede Konstante $\alpha > 0$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} P\big(|X_n| \geq \frac{\alpha}{c_n}\big) < \infty$.

37. Für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger und identisch verteilter positiver Zufallsvariablen mit $0 < EX_1 < \infty$ und $E(X_1^2) < \infty$ seien $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$, Ausfallzeiten eines Bauteils. Sei ferner $N(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$, $t \geq 0$, die Zahl der bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen Ausfälle. Setze dabei $\sup\emptyset = 0$. Beweisen Sie:

a) $N(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ f.s.

b) $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{EX_1}$ f.s.

Hinweis: Für alle $t \geq 0$ gilt: $N(t) < \infty$ f.s.

38. a) Wenn $X_n \Rightarrow X$ und $Y_n - X_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit, dann gilt $Y_n \Rightarrow X$.

b) Wenn $X_n \to c$ in Wahrscheinlichkeit und $Y_n \Rightarrow Y$, dann gilt $X_nY_n \Rightarrow cY$.

39. a) Wenn $X_n \Rightarrow c$, dann $X_n \to c$ in Wahrscheinlichkeit.

b) Wenn $X_n \to c$ in Wahrscheinlichkeit, dann $X_n \Rightarrow c$.

40. a) Wenn $X_n \Rightarrow X$ gilt und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gilt auch $f \circ X_n \Rightarrow f \circ X$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in 0 und $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \to \infty$. Wenn $a_nX_n \Rightarrow Y$, dann gilt

$$a_n\big(f(X_n) - f(0)\big) \Rightarrow f'(0)Y.$$