Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Sommersemester 2008**

Übungen zur Stochastik I
Serie 11
Abgabe: Dienstag, 1. Juli 2008, vor der Vorlesung

51. Sei Y eine integrierbare, nichtnegative reelle Zufallsvariable auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Für zwei Sub-σ-Algebren $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ von $\mathcal{F}$ bezeichne $\mathcal{G}_3$ die von $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. Beweisen Sie, dass dann die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $E(Y|\mathcal{G}_3) = E(Y|\mathcal{G}_2)$ f.s.

(b) $E(XY|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_2)E(Y|\mathcal{G}_2)$ f.s. für alle $\mathcal{G}_1$-messbaren reellen Zufallsvariablen $X \geq 0$.

Beachten Sie dabei, dass $\mathcal{E} := \{C_1 \cap C_2 : C_1 \in \mathcal{G}_1, C_2 \in \mathcal{G}_2\}$ ein π-System ist, das die σ-Algebra $\mathcal{G}_3$ erzeugt.

52. a) (*Der bedingte Erwartungswert ist eine Projektion.*) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}$ eine Sub-σ-Algebra. Sei weiter $X \in L_2(P|\mathcal{F})$. Dann gilt

$$E(XY) = E\big(YE(X|\mathcal{G})\big)$$

für alle $Y \in L_2(P|\mathcal{G})$, also $X - E(X|\mathcal{G}) \perp L_2(P|\mathcal{G})$.

b) (*Selbstadjungiertheit des bedingten Erwartungswertes*) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}$ eine Sub-σ-Algebra. Sind $X, Y \in L_2(P|\mathcal{F})$, dann gilt:

$$E\big(E(X|\mathcal{G})Y\big) = E\big(XE(Y|\mathcal{G})\big).$$

Hinweis: $X \in L_2(P|\mathcal{G})$ heißt $X \in L_2(P)$ und X $\mathcal{G}$-messbar.
Bemerkung zu a): Der bedingte Erwartungswert $E(X|\mathcal{G})$ ist also die beste L_2-Approximation von X auf den Raum $L_2(P|\mathcal{G})$, d.h. $E(X|\mathcal{G})$ ist (bis auf fast sichere Gleichheit) die einzige $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable $X_0 \in L_2(P|\mathcal{G})$, für die der Erwartungswert $E[(X - X_0)^2]$ minimal wird.

53. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P(X_1 = 1) =: p$ und $P(X_1 = -1) = 1 - p =: q$. Setze $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$. In dieser Situation heißt die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *einfache Irrfahrt.* Zeigen Sie, dass

$\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}, \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal ist.
Hinweis: Es gilt $\mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n) = \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$.

54. Sei X_1 eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Gegeben $X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}$ sei X_n gleichverteilt auf dem Intervall $(0, x_{n-1})$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Supermartingal mit $E(X_n) = 2^{-n}$ ist. Folgern Sie: $X_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit.

55. Sei $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal. Definiere

$$Y_0 := X_0, Y_n := Y_{n-1} + (X_n - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

sowie $A_0 := 0$ und

$$A_n := A_{n-1} + (X_{n-1} - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})) \text{ für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $X_n = Y_n - A_n$.

(b) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal.

(c) Für fast alle ω ist $A_n(\omega)$ nichtfallend in n.