Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Sommersemester 2008**

Übungen zur Stochastik I
Serie 13
Abgabe: Dienstag, 15. Juli 2008, vor der Vorlesung

Bitte beachten Sie, dass alle Punkte, die Sie auf diesem Übungsblatt erreichen können, **Bonuspunkte** sind.

61. Gilt $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$, dann gilt $X_n \to X$ fast sicher.

62. (*Verteilungskonvergenz diskreter Zufallsvariablen*)
Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $X_n \Rightarrow X$

b) $P(X_n = k) \xrightarrow{n\to\infty} P(X = k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

63. Ist φ eine charakteristische Funktion, dann auch $|\varphi|^2$.

64. (3 Punkte) Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängig mit Erwartungswert 0, und sei $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Berechnen Sie $E(S_{n+1}|S_1, \ldots, S_n)$ und $E(S_{n+1}|S_n)$.

65. (5 Punkte) (*Quadratintegrierbare Martingale*) Sei $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $E(X_n^2) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) $(X_n^2, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Submartingal.

(ii) $E(X_n^2)$ wächst in n.

(iii) $E(X_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n^2$.

(iv) $E((X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n)$.

(v) Setze $A_0 = 0$ und $A_n = A_{n-1} + E(X_n^2 - X_{n-1}^2|\mathcal{F}_{n-1})$. Dann ist A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar und nichtfallend in n und $(X_n^2 - A_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal. (A_n heißt *Kompensator* von X_n^2.)