Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz

Wintersemester 2008/2009

Übungen zur Stochastik II
Serie 1
Abgabe: Dienstag, 21. Oktober 2008, vor der Vorlesung

1. Es seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige $\mathbb{Z}^d$-wertige Zufallsvariablen mit $P(X_i = j) = \frac{1}{2d}$ für $j \in \mathbb{Z}^d$ mit $|j| = 1$. Setze $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $(\|S_n\|^2, n \in \mathbb{N})$ ist ein Submartingal.

(b) $(\|S_n\|^2 - n, n \in \mathbb{N})$ ist ein Martingal.

2. Betrachten Sie die durch folgende Angaben definierte Markov-Kette. Sei $X_0 = 0$ und

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = n+1 | X_n = n) = p_{n+1} = 1 - P(X_{n+1} = -(n+1) | X_n = n) \\ &P(X_{n+1} = -k | X_n = -k) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für $p_{n+1} = (2n+1)/(2n+2)$, $n \in \mathbb{N}_0$, die Markov-Kette ein Martingal ist.

3. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ferner sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren (eine sog. *Filtration*), und X_n sei $\mathcal{F}_n$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es ist

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{2}X_n + \frac{1}{2}X_{n-1}, \qquad \forall n = 2, 3, \ldots.$$

Zeigen Sie: Falls $\sup_n E|X_n| < \infty$, dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ P-f.s. für $n \to \infty$. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

(a) Beweisen Sie, dass die Folge $(Y_n)_{n\geq 2}$ mit $Y_n = X_n + \frac{1}{2}X_{n-1}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 2}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(Y_n)_{n\geq 2}$ P-f.s. gegen eine integrierbare Zufallsvariable Y konvergiert.

(c) Schließen Sie daraus auf die P-f.s. Konvergenz der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer, unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert Eins. Seien $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n)$. Ist $X_0 = 0$ und $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$, dann ist $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $(\sqrt{X_n}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal.

5. Seien X_n und $\mathcal{F}_n$ wie in Aufgabe 4 definiert. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\prod_{k=1}^\infty E[\sqrt{Y_k}] = 0$, dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht in L_1.

(b) Wenn $\prod_{k=1}^\infty E[\sqrt{Y_k}] > 0$, dann ist $(\sqrt{X_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in L_2 und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert in L_1.