Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2008/2009**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik II
Serie 5
Abgabe: Dienstag, 18. November 2008, vor der Vorlesung

21. (2 Punkte) a) Zeigen Sie, dass ein Zufallsvektor $(X_1, \ldots, X_n)$ genau dann normalverteilt ist, wenn $t_1X_1 + \ldots + t_nX_n$ normalverteilt ist für alle $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.
b) Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, und X d-dimensionale Zufallsvektoren. Zeigen Sie: Es gilt $X_n \Rightarrow X$ genau dann, wenn $t^\top X_n \Rightarrow t^\top X$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$.

22. Sei B die Brownsche Bewegung und $0 < s < t < u$. Berechnen Sie die bedingte Verteilung von B_t gegeben B_s und B_u.

23. (3 Punkte) Für die Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ gilt: $(B_{st})_{s\geq 0}$ ist verteilt wie $(t^{1/2}B_s)_{s\geq 0}$ für alle $t \geq 0$.
Hinweis: Es genügt, die endlich-dimensionalen Randverteilungen zu betrachten.

24. Ist B eine eindimensionale Brownsche Bewegung, so sind folgende Prozesse Martingale bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}(B_s, s \leq t)$:

a) $B_t^2 - t$,

b) $\exp(aB_t - \frac{1}{2}a^2t)$, $a \in \mathbb{R}$.

25. (7 Punkte) Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und $E_{1/a}$-verteilt. Zeigen Sie:

a) $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ist $\Gamma_{1/a,n}$-verteilt.

b) $N_t = \#\{n : S_n \leq t\}$ ist P_{at}-verteilt.

c) Sei $(\mathcal{F}_t)$ die natürliche Filtration von N. Zu $A \in \mathcal{F}_s$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert $B \in \mathcal{F}(S_1, \ldots, S_n)$ mit $A \cap \{N_s = n\} = B \cap \{N_s = n\}$.

d) Für $A \in \mathcal{F}_s$ und $t \geq s$ gilt

$$E1_{A\cap\{N_s=n\}}P(S_{n+1} > t|\mathcal{F}_s) = e^{-a(t-s)}P(A \cap \{N_s = n\}).$$

e) Für $t \geq s$ gilt: $P(S_{N_s+1} > t | \mathcal{F}_s) = e^{-a(t-s)}$.

f) Für $A \in \mathcal{F}_s$ und $t \geq s$ gilt

$$E1_{A \cap \{N_s = n\}} P(N_t - N_s \leq k | \mathcal{F}_s) = \sum_{j=1}^{k} e^{-a(t-s)} \frac{(a(t-s))^j}{j!} P(A \cap \{N_s = n\}).$$

g) N hat unabhängige Zuwächse.

Ein Prozess N mit unabhängigen Zuwächsen und $N_t - N_s \sim P_{a(t-s)}$ für $s < t$ heißt *Poisson-Prozess* mit *Intensität* a.