Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2008/2009**

Übungen zur Stochastik II
Serie 7
Abgabe: Dienstag, 2. Dezember 2008, vor der Vorlesung

31. Sei B die Brownsche Bewegung und $M_t := \sup_{0 \le s \le t} B_s$. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von M_t gegeben $B_t = M_t$.

32. Sei M_t definiert wie in Aufgabe 31. Leiten Sie mit Hilfe der Proposition 33.2 (Maximumprozess) folgende Aussage her:

$$\text{Für } a > 0 \text{ gilt:} \quad P(M_t \ge at) \le \exp(-a^2 t/2).$$

33. Sei die Stoppzeit T_a definiert durch

$$T_a := \inf\{t \ge 0 : B_t \ge a\}.$$

Bestimmen Sie die Dichte von T_a.
Hinweis: Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen M_t und T_a her und benutzen Sie Proposition 33.2 (Maximumprozess).

34. Sei B die Brownsche Bewegung. Zeigen Sie:

a) $\liminf_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1$ f.s.

b) $\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log(\frac{1}{t})}} = 1$ f.s.

c) $\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_{s+t} - B_s}{\sqrt{2t \log\log(\frac{1}{t})}} = 1$ f.s.

35. Sei B die Brownsche Bewegung. Für jedes t gilt:

$$\limsup_{u \downarrow 0} \frac{|B_{t+u} - B_t|}{\sqrt{u}} = \infty \text{ f.s..}$$

Die Pfade sind also nicht Hölder-stetig der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Bonusaufgabe: Beweisen Sie folgende Aussagen aus der Vorlesung:

a) Auf einer Menge von Maßen (auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$) wird durch die Abbildungen $\mu \mapsto \mu B$ für messbare B eine σ-Algebra induziert.

b) Sei nun μ ein Maß auf $\mathbb{R}$. Setze $\mu_\pm = \mu|\mathbb{R}_\pm \backslash \{0\}$ und

$$\mu^*(dx, dy) := \mu\{0\}\delta_{00}(dx, dy) + \frac{y - x}{\int x\mu_+(dx)}\mu_-(dx)\mu_+(dy).$$

Dann ist die Abbildung $\mu \mapsto \mu^*$ messbar bezüglich der σ-Algebra aus a).

c) Für reellwertige, nicht negative messbare Funktionen f ist auch die Abbildung $\mu \mapsto \mu f$ messbar bezüglich der induzierten σ-Algebra aus a).