Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2008/2009**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik II
Serie 8

Abgabe: Dienstag, 9. Dezember 2008, vor der Vorlesung

36. Sie B eine Brownsche Bewegung und $M_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_t$. Zeigen Sie, dass $(B_t, M_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess ist. Berechnen Sie die Dichte seiner Übergangsverteilung.

37. a) Sei X eine N_{0,σ^2}-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass gilt

$$E(X^p) = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)\sigma^{2n} & p = 2n \\ 0 & p = 2n-1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

b) Ist B eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)$, dann sind bekanntlich B_t, $B_t^2 - t$ und $B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ Martingale. Bestimmen Sie ein ähnliches Martingal, dessen führender Term B_t^5 ist.

38. Ist B eine Brownsche Bewegung und τ eine Stoppzeit, so gilt $E\tau \geq EB_\tau^2$.

39. Sei B eine Brownsche Bewegung und f eine beschränkte und messbare Funktion. Dann gilt:

$$E\int_0^x f(B_t)dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\frac{y^2}{2t}}dydt.$$

(Erneuerungsprozess) Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von positiven, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert 1 und Varianz $\sigma^2 < \infty$. Ferner sei $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ und $N_t = \#\{n : S_n \leq t\}$. Dann heißt N *Erneuerungsprozess.*

40. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t - t - \sigma B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 0 \text{ f.s.}$$

Insbesondere gilt für N ein Gesetz vom iterierten Logarithmus.
(*Hinweis:* Sehen Sie sich N zunächst an den Sprungstellen $t = S_n$ an.)

Bonusaufgabe: (*Eigenschaften von Stoppzeiten*) Seien σ und τ Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

a) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

b) $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$ auf $\{\tau = t\}$, d.h. $\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = t\} = \mathcal{F}_t \cap \{\tau = t\}$.

c) $\mathcal{F}_\sigma \cap \{\sigma \leq \tau\} \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.