Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2008/2009**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik II
Serie 9
Abgabe: Dienstag, 16. Dezember 2008, vor der Vorlesung

41. (3 Punkte) Seien B eine Brownsche Bewegung mit stetigen Pfaden und $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\}$ (vgl. Aufgabe 33). Betrachten Sie den Prozess $T = (T_a)_{a \geq 0}$. Zeigen Sie, dass für $0 \leq a < b$ das Inkrement $T_b - T_a$ unabhängig von $\mathcal{F}^+_{T_a}$ ist und die Dichte

$$\frac{b-a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2t}\right), t > 0$$

besitzt.

42. a) Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ iid mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Zeigen Sie, dass $n^{-1/2} \sup_{0 \leq m \leq n} \sum_{k=1}^m \xi_k$ in Verteilung gegen $M_1 = \sup_{0 \leq t \leq 1} B_t$ konvergiert.
b) Wie folgt aus Satz 34.16 der zentrale Grenzwertsatz in der Form

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} \Rightarrow N_{0,1}$$

für $X_1, X_2, \ldots$ iid mit $EX_i = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$?

43. (5 Punkte) Seien B eine Brownsche Bewegung und g eine beschränkte Funktion auf $[0, 1]$. Dann ist

$$\int_0^1 g(t) B_t dt$$

normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $\int_0^1 \int_0^1 g(s)g(t) s \wedge t ds dt$. Betrachten Sie dazu unabhängige $N_{0,1}$-verteilte Zufallsvariablen ξ_k. Zeigen Sie für $X^n_t := n^{-1/2} \sum_{k \leq nt} \xi_k$, dass $\int_0^1 g(t) X^n_t dt$ in Verteilung sowohl gegen $\int_0^1 g(t) B_t dt$ als auch gegen eine $N_{0, \int_0^1 \int_0^1 g(s)g(t) s \wedge t ds dt}$-verteilte Zufallsvariable konvergiert.

44. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Submartingal. Beweisen Sie für $\alpha > 1$ die Ungleichung

$$E\left[\left(\sup_{k \leq n} X^+_k\right)^\alpha\right] \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^\alpha E[(X^+_n)^\alpha].$$

Hinweis: Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung aus Stochastik I.

45. Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P\left(\sup_{k\le n} Z_k \ge a\right) \le \frac{1}{a}(E[Z_n^+] + EZ_0 - EZ_n), a > 0.$$

Benutzen Sie dazu die Doob-Zerlegung aus Aufgabe 55 (Stochastik I):
Ein Supermartingal $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lässt sich schreiben als $Z_n = X_n - A_n$, wobei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine nichtfallende Folge von Zufallsvariablen mit $A_0 = 0$ ist.

Bonusaufgabe: Sei B eine Brownsche Bewegung und N ein Erneuerungsprozess wie in Aufgabe 40. Zeigen Sie, dass

$$t^{-1/2} \sup_{s\le t} |N_s - s - \sigma B_s| \to 0 \quad \text{in W.}$$

für $t \to \infty$. Insbesondere gilt für N ein funktionaler zentraler Grenzwertsatz.