Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz

Wintersemester 2008/2009

Übungen zur Stochastik II
Serie 12
Abgabe: Dienstag, 27. Januar 2009, vor der Vorlesung

56. Seien X und Y stetige lokale Martingale. Dann gelten die Ungleichungen

$$|[X,Y]|^2 \leq [X,X][Y,Y]$$

und

$$[X+Y,X+Y]^{1/2} \leq [X,X]^{1/2} + [Y,Y]^{1/2}.$$

Aus der letzteren folgt

$$|[X,X]^{1/2} - [Y,Y]^{1/2}| \leq [X-Y,X-Y]^{1/2}.$$

57. Seien M und N stetige lokale Martingale.

a) Wenn $U, V \in L(M)$, dann ist auch $U+V \in L(M)$ und es gilt

$$(U+V)\cdot M = U\cdot M + V\cdot M \quad \text{f.s.}$$

b) Wenn $V \in L(M) \cap L(N)$, dann ist $V \in L(M+N)$ und es gilt

$$V\cdot(M+N) = V\cdot M + V\cdot N \quad \text{f.s.}$$

58. a) Seien M ein stetiges lokales Martingal und $V \in L(M)$. Für eine Stoppzeit τ gilt

$$(V\cdot M)^\tau = V\cdot M^\tau = (V1_{[0,\tau]})\cdot M \quad \text{f.s.}$$

b) Seien nun $U, V \in L(M)$ zwei progressive Prozesse mit $U = V$ auf einer Menge $A \in \mathcal{F}_0$. Dann gilt $U\cdot M = V\cdot M$ f.s. auf A.
Hinweis zu b): Benutzen Sie Aufgabenteil a).

59. Sei $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $(h\cdot B)_t$ normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Varianz $\int_0^t h_s^2 ds$.

Definition: Ein Prozess X heißt *Semimartingal*, wenn er eine Darstellung $X = M + A$ mit einem stetigen lokalen Martingal M und einem stetigen adaptierten Prozess A von endlicher Variation mit $A_0 = 0$ hat.

60. Seien $X = M + A$ und $Y = N + B$ stetige Semimartingale und Z eine $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable.
a) Zeigen Sie, dass die Zerlegung $X = M + A$ f.s. eindeutig ist.
b) Beweisen Sie, dass auch $ZX + Y$ ein Semimartingal ist.

Bonusaufgabe Sei T eine Stoppzeit. Dann ist der Prozess X^T genau dann ein Martingal bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$, wenn er ein Martingal bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist.