Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2008/2009**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik II
Serie 13
Abgabe: Montag, 2. Februar 2009, vor der Vorlesung

Bitte beachten Sie, dass alle Punkte, die Sie auf diesem Übungsblatt erreichen können, **Bonuspunkte** sind.

A.1 Sei W eine Brownsche Bewegung und $B = (W_t - tW_1)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Brücke. Zeigen Sie, dass $X_t = B_{t\wedge 1}$ ein Semimartingal ist.
Hinweis: Gehen Sie in folgenden Schritten vor:
1. Beweisen Sie, dass $(1-t)^{-1}B_t$ ein Martingal auf $[0,1)$ bezüglich der Filtrierung $(\sigma(W_s, s \le t, W_1))_{t\in[0,1]}$ ist.
2. Benutzen Sie partielle Integration (Satz 38.14).
3. Weisen Sie nach, dass der kompensierende Prozess von endlicher Variation ist.

Definition: Für zwei stetige Semimartingale X und Y ist das *Fisk-Stratonovich-Integral* definiert durch

$$(X \circ Y)_t := \int_0^t X \circ dY := (X \cdot Y)_t + \frac{1}{2}[X,Y]_t,\ t \ge 0.$$

Dabei ist $X \cdot Y$ das aus der Vorlesung bekannte Itô-Integral.

A.2 Seien X und Y zwei stetige Semimartingale, $t > 0$ und $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nk} = t$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,t]$ mit $\max_k |t_{nk} - t_{n,k-1}| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}\sum_k (Y_{t_{nk}} + Y_{t_{n,k-1}})(X_{t_{nk}} - X_{t_{n,k-1}}) \xrightarrow{P} (Y \circ X)_t.$$

A.3 Zeigen Sie, dass für jedes stetige Semimartingal $X = (X^1, \ldots, X^d)$ in $\mathbb{R}^d$ und jede Funktion $f \in C^3(\mathbb{R}^d)$ f.s. gilt

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t f^{(i)}(X) \circ dX^i,\ t \ge 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Itô-Formel aus Satz 38.16.

A.4 Seien X ein Semimartingal sowie U und V progressive Prozesse mit $V \in L(X)$ und $U \in L(V \cdot X)$. Zeigen Sie, dass für das Fisk-Stratonovich-Integral gilt
$$U \circ (V \circ X) = (UV) \circ X.$$
Hinweis: Reduzieren Sie die Integrale auf Itô-Integrale und benutzen Sie Satz 38.10, Satz 38.14 und Proposition 38.13.