

Übungen zur Statistik I
Serie 1

Abgabe: Dienstag, 21. April 2009, vor der Vorlesung

1. Zeigen Sie, dass folgende Verteilungsfamilien mit Zähldichten exponentielle Familien bezüglich λ bzw. $p \in (0, 1)$ sind. Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

a) Die Poissonverteilungen P_λ , $\lambda > 0$, mit Zähldichte

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

b) Die negativen Binomialverteilungen $B_{n,p}^-$, $p \in (0, 1)$, mit Zähldichte

$$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k = n, n+1, \dots$$

2. Zeigen Sie, dass folgende Verteilungsfamilien mit Lebesgue-Dichte exponentielle Familien bezüglich aller Parameter sind. Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

a) Die Gamma-Verteilungen $\Gamma_{a,b}$, $a, b > 0$, mit Dichte

$$\frac{1}{a^b \Gamma(b)} x^{b-1} e^{-x/a}, \quad x > 0.$$

b) Die Beta-Verteilungen $B_{a,b}$, $a, b > 0$, mit Dichte

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

3. Bilden die Exponentialverteilungen $E(a, \vartheta)$ mit Dichte

$$\vartheta^{-1} e^{-(x-a)/\vartheta} 1_{(a, \infty)}(x), \quad \vartheta > 0, a \in \mathbb{R}$$

und unbekanntem Parametern a und ϑ eine exponentielle Familie? Wie verhält es sich bei festem a ?

4. Der natürliche Parameterraum einer k -parametrischen exponentiellen Familie ist konvex und enthält ein nicht-entartetes k -dimensionales Intervall.

5. Seien X_1 und X_2 unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Statistik $X_1 + X_2$ suffizient für λ ist, die Statistik $2X_1 + X_2$ jedoch nicht.