

Übungen zur Statistik I
Serie 10

Abgabe: Dienstag, 30. Juni 2009, vor der Vorlesung

Seien X_i , $i \in \mathbb{N}$, unabhängig mit Verteilungsfunktion F . Sei $g(X_1, \dots, X_m)$ integrierbar und symmetrisch in den Argumenten. Die zu X_1, \dots, X_n mit $n \geq m$ gehörige U -Statistik ist

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}} g(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}).$$

46. Die Folge $(U_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq m}$ mit $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}((X_{1:n}, \dots, X_{n:n})^\top, X_{n+1}, \dots)$ ist ein Rückwärtsmartingal.

Hinweis: Es gilt $U_n = E(g(X_1, \dots, X_m) | X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$.

47. Setze $\bar{g} = g - E[g(X_1, \dots, X_m)]$ und definiere

$$\begin{aligned} g_k(x_1, \dots, x_k) &= E[g(x_1, \dots, x_k, X_{k+1}, \dots, X_m)] \\ &= E(g(X_1, \dots, X_m) | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine U -Statistik U_n mit $E[g^2(X_1, \dots, X_m)] < \infty$ gilt

$$\text{Var}(U_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k} \zeta_k$$

mit $\zeta_k := \text{Var}(g_k(X_1, \dots, X_k))$.

48. Zeigen Sie unter den Voraussetzungen aus Aufgabe 48:

- Es gilt $\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \dots \leq \zeta_m$.
- Sei m fest und k zwischen 1 und m so, dass $\zeta_j = 0$ für $j < k$ und $\zeta_k > 0$, dann gilt

$$\text{Var}(U_n) = \frac{k! \binom{m}{k}^2 \zeta_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

49. Definiere $\check{U}_n = EU_n + \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n (g_1(X_i) - E[g(X_1, \dots, X_m)])$ mit \bar{g}_1 wie in Aufgabe 48. Sei $E[g^2(X_1, \dots, X_m)] < \infty$ und $\zeta_1 > 0$.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$E[(U_n - \check{U}_n)^2] = O(n^{-2}).$$

b) Folgern Sie

$$\sqrt{n}(U_n - EU_n) \Rightarrow N_{0, m^2 \zeta_1}.$$

50. Geben Sie für folgende Funktionen die zugehörigen U-Statistiken an und berechnen Sie \check{U}_n , $\text{Var}(U_n)$ und die asymptotische Verteilung von U_n .

a) $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$,

b) $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$,

c) **(2 Bonuspunkte)** $g(x_1, x_2) = 1_{(-\infty, 0]}(x_1 + x_2)$.

Mitteilung: Am 26.6.09 veranstaltet die Fachschaft wieder ein großes Sommerfest! Auf dem Parkplatz des Mathematischen Instituts wird ab 18 Uhr gegrillt und für Getränke ist auch gesorgt. Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!

Eure Fachschaft