Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2009/10**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen (Statistik II)
Serie 1
Abgabe: Dienstag, 20. Oktober 2009, vor der Vorlesung

Sei μ ein k-dimensionaler Vektor und Σ eine positiv definite $k \times k$ Matrix. Die *k-dimensionale Normalverteilung* $N(\mu, \Sigma)$ mit Mittelwertvektor μ und Kovarianzmatrix Σ hat die Dichte

$$p_{\mu,\Sigma}(x) = (2\pi)^{-k/2}(\det \Sigma)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\Big).$$

Es gilt folgende mehrdimensionale Version des zentralen Grenzwertsatzes. Sind $X, X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren mit Mittelwertvektor $\mu = EX$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = E(X-\mu)(X-\mu)^\top$, dann gilt

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \Rightarrow N(\mu, \Sigma).$$

1. Seien $X, X_1, X_2, \dots$ i.i.d., und für $j = 1, \dots, k$ seien h_j reellwertige Funktionen mit $Eh_j(X) = 0$ und $Eh_j^2(X) < \infty$. Seien T_{nj} *asymptotisch lineare* Schätzer für t_j mit *Einflussfunktion* $h_j(X)$, d.h. es gilt

$$n^{1/2}(T_{nj} - t_j) = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} h_j(X_i) + o_p(1).$$

Zeigen Sie mit $T_n = (T_{n1}, \dots, T_{nk})^\top$, $t = (t_1, \dots, t_k)^\top$, $h = (h_1, \dots, h_k)^\top$:
a) Die Schätzer T_n sind asymptotisch linear für t mit Einflussfunktion h:

$$n^{1/2}(T_n - t) = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) + o_p(1).$$

b) Hat $\Sigma = Eh(X)h(X)^\top$ eine von 0 verschiedene Determinante, so gilt $n^{1/2}(T_n - t) \Rightarrow N(0, \Sigma)$.

2. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Seien S_n, T_n reellwertige Schätzer für t mit Einflussfunktionen $g(X)$, $h(X)$, so dass $Eg(X) = Eh(X) = 0$ und $\sigma^2 = Eg^2(X) = Eh^2(X) < \infty$ gilt. Dann ist das arithmetische Mittel $(S_n + T_n)/2$ asymptotisch nicht schlechter als S_n oder T_n. Wie gut kann es werden?

3. a) Sei μ ein σ-endliches und ν ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mu(B) \le \delta \ \Rightarrow \ \nu(B) \le \varepsilon.$$

b) Betrachte nun die Folgen (P_n) und (Q_n) mit $P_n := P$ und $Q_n := Q$ für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q. Zeigen Sie, dass $Q_n \lhd P_n$ genau dann gilt, wenn $Q \ll P$.

4. a) Bezeichne $U(a, b)$ die Gleichverteilung auf dem Intervall (a, b). Für $n \in \mathbb{N}$ seien $P_n := \bigotimes_{j=1}^n U(0,1)$ und $Q_n := \bigotimes_{j=1}^n U(n^{-\delta}, 1 + n^{-\delta})$, $\delta > 0$. Dann gilt:

$$Q_n \lhd P_n \quad \Leftrightarrow \quad \delta > 1.$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $P_n := \bigotimes_{j=1}^n N_{0,1}$ und $Q_n := \bigotimes_{j=1}^n N_{n^{-\delta},1}$, $\delta > 0$. Dann gilt:

$$Q_n \lhd P_n \quad \Leftrightarrow \quad \delta \ge \frac{1}{2}\,.$$

5. a) Definiere $\|P - Q\| := \sup_A |P(A) - Q(A)|$. Seien nun zwei Folgen (P_n) und (Q_n) von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit $\|P_n - Q_n\| \to 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt $P_n \lhd Q_n$ und $Q_n \lhd P_n$.
b) Sei $\varepsilon > 0$. Finden Sie ein Beispiel von Folgen (P_n) und (Q_n), so dass $P_n \lhd Q_n$ und $Q_n \lhd P_n$ gilt, aber $\|P_n - Q_n\|$ gegen $1 - \varepsilon$ konvergiert.
Hinweis: Versuchen Sie es mit Zweipunktmaßen.