Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2009/10**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen (Statistik II)
Serie 2
Abgabe: Dienstag, 27. Oktober 2009, vor der Vorlesung

Eine Abbildung $s \mapsto a_s$ von $\mathbb{R}$ nach $L_p(P)$ heißt $L_p(P)$-*differenzierbar* in t mit *Ableitung* $\dot{a}$, wenn

$$\|a_s - a_t - (s-t)\dot{a}\|_p = o(|s-t|).$$

Eine Abbildung $s \mapsto f_s$ von $\mathbb{R}$ in die Dichten auf $\mathbb{R}$ heißt *Hellinger-differenzierbar* in t mit *Ableitung* $\dot{a}$, wenn

$$\lambda\Big(f_s^{1/2} - f_t^{1/2} - \frac{1}{2}(s-t)\dot{a} f_t^{1/2}\Big)^2 = o((s-t)^2).$$

6. (3 Punkte) Sei $1 \le p < q$. Ist $s \mapsto a_s$ $L_q(P)$- differenzierbar in t, so auch $L_p(P)$-differenzierbar mit derselben Ableitung.

7. Ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_2(f_t)$-differenzierbar in t, so ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar mit derselben Ableitung.
Hinweis: $f_s - f_t = (f_s^{1/2} - f_t^{1/2})(f_s^{1/2} + f_t^{1/2})$.

8. Ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar in t, so ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_1(f_t)$-differenzierbar mit derselben Ableitung.

9. (6 Punkte) a) Zeigen Sie, dass die Lageparameter-Familie P_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$, mit Lebesgue-Dichten

$$p_\vartheta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\vartheta|}$$

in jedem Punkt $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_{\vartheta_0}(x) = \operatorname{sgn}(x - \vartheta_0)$ ist.
b) Zeigen Sie, dass die Familie der Dichten der Gleichverteilung auf $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, nirgendwo Hellinger-differenzierbar ist.

10. (3 Punkte) Ist P_τ Hellinger-differenzierbar in $\tau = \vartheta$ und $\vartheta_{nt} = \vartheta + n^{-1/2}t$, so sind die Produktmaße $P^n_{\vartheta_{nt}}$ und P^n_ϑ benachbart.