Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2009/10**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen (Statistik II)
Serie 4
Abgabe: Dienstag, 10. November 2009, vor der Vorlesung

16. *(Komponentenweise Effizienz impliziert verbundene Effizienz.)* Sei P_{na}, $a \in A$, lokal asymptotisch normal in a. Für $j = 1, \ldots, m$ seien $\varkappa_j : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a mit kanonischem Gradienten g_{0j}, und $\hat{\varkappa}_j$ reguläre und effiziente Schätzer für $\varkappa_j$ in a. Dann ist $\hat{\varkappa} = (\hat{\varkappa}_1, \ldots, \hat{\varkappa}_m)^\top$ regulär und effizient für $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)^\top$ in a und asymptotisch linear mit Einflussfunktion $g_0 = (g_{01}, \ldots, g_{0m})^\top$.

17. Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{B}$ mit endlichem vierten Moment. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $\varkappa(P)$ das zweite Moment von P. Zeigen Sie, dass $\varkappa$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie den (kanonischen) Gradienten und einen effizienten Schätzer für $\varkappa$.

18. Sei $h : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{F}$-messbar und $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{F}$, für die $h \in L_{2,0}^m(P)$ und $Phh^\top$ positiv definit ist. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2^k(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P, den kanonischen Gradienten von $\varkappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf.

19. Seien $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ unabhängige zweidimensionale Zufallsvektoren mit Verteilung P_ϑ, so dass gilt: $Y_i = \vartheta X_i + \varepsilon_i$ mit X_i und ε_i unabhängig. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ besitze ε_i die bekannte Dichte f mit $\int u^2 f(u) du < \infty$ und X_i die bekannte Dichte g mit $\int x^2 g(x) dx > 0$. f sei stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Bestimmen Sie die effiziente Einflussfunktion. Ist der Kleinste Quadrate-Schätzer

$$\hat{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

effizient? Ist er regulär?

20. Sei $T_1, \ldots, T_m$ eine Gruppe messbarer Transformationen auf Ω. Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{F}$, die unter $T_1, \ldots, T_m$ invariant sind. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P, den kanonischen Gradienten von $\varkappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf.