Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2009/10**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen (Statistik II)
Serie 5

Abgabe: Dienstag, 17. November 2009, vor der Vorlesung

21. Seien $X_1, \dots, X_{2n}$ Beobachtungen in Ω und f auf Ω beschränkt. Geben Sie ein Modell an, in dem der Schätzer $(1/n) \sum_{i=1}^n f(X_{2i})$ asymptotisch linear, regulär und effizient ist.

22. Seien $X_1, \dots, X_{2n}$ Beobachtungen in Ω und f auf Ω^2 beschränkt. Geben Sie ein Modell an, in dem der Schätzer $(1/n) \sum_{i=1}^n f(X_{2i-1}, X_{2i})$ asymptotisch linear, regulär und effizient ist.

23. Seien $X_1, \dots, X_{2n}$ Beobachtungen in Ω und f auf Ω^2 beschränkt. Geben Sie ein Modell an, in dem der Schätzer $(1/2n) \sum_{i=1}^n (f(X_{2i-1}, X_{2i}) + f(X_{2i}, X_{2i-1}))$ asymptotisch linear, regulär und effizient ist.

24. *(Paarweise Beobachtungen)* Sei $X_0, X_1, \dots$ eine Markov-Kette mit Übergangsverteilung Q und invarianter Verteilung π.
Ist $(X_0, X_1), (X_2, X_3), \dots$ eine Markov-Kette? Was ist ihre Übergangsverteilung und ihre invariante Verteilung?

Sei wie in der Vorlesung $X_0, X_1, \dots$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$.
Definition: Eine Menge $A \in \mathcal{E}$ heißt *Harris-rekurrent*, wenn

$$P_x\Big(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n \in A\}} = \infty\Big) = 1 \quad , x \in A.$$

25. Für $A \in \mathcal{E}$ seien $\tau_A := \inf\{k \geq 1 : X_k \in A\}$ die Rückkehrzeit nach A und $\eta_A := \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n \in A\}}$ die Anzahl der Besuche in A. Setze $Q(x, A) = P_x(\eta_A = \infty)$ und $L(x, A) = P_x(\tau_A < \infty)$. Für eine Menge $A \in \mathcal{E}$ und alle $x \in A$ gelte $L(x, A) = 1$. Dann gilt $Q(x, A) = L(x, A)$ für alle $x \in E$. Insbesondere ist A Harris-rekurrent.

Hinweis: Die Markov-Kette besitzt die starke Markov-Eigenschaft, d.h. für eine beliebige Startverteilung μ, eine reellwertige, beschränkte und messbare Funktion h und eine Stoppzeit τ gilt

$$E_\mu(h(X_\tau, X_{\tau+1}, \dots) | \mathcal{F}_\tau^X) = E_{X_\tau}[h(X_0, X_1, \dots)] \ P_\mu\text{-f.s.}$$

auf der Menge $\{\tau < \infty\}$.