

Übungen zur Statistik für Zeitreihen (Statistik II)
Serie 8

Abgabe: Dienstag, 8. Dezember 2009, vor der Vorlesung

36. Finden Sie für die allgemeine AR(1)-Zeitreihe $X_t = \varrho X_{t-1} + Z_t$ mit $|\varrho| > 1$ eine stationäre Lösung (der nicht-kausalen Form $X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j Z_{t+j}$).

37. Untersuchen Sie, ob die folgenden Prozesse kausal und/oder invertierbar sind:

- a) $X_t + 0,2X_{t-1} - 0,48X_{t-2} = Z_t$,
- b) $X_t + 1,9X_{t-1} + 0,88X_{t-2} = Z_t + 0,2Z_{t-1} + 0,7Z_{t-2}$,
- c) $X_t + 0,6X_{t-2} = Z_t + 1,2Z_{t-1}$,
- d) $X_t - 1,6X_{t-1} - 0,8X_{t-2} = Z_t + 1,6Z_{t-1} + 3,2Z_{t-2}$.

38. Sei $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine stationäre Zeitreihe. Zeigen Sie, dass eine stationäre Lösung (X_t) der Gleichung

$$X_t - \varrho_1 X_{t-1} - \cdots - \varrho_p X_{t-p} = Y_t + \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_q Y_{t-q}$$

existiert, wenn $\varrho(z) = 1 - \varrho_1 z - \cdots - \varrho_p z^p \neq 0$ für $|z| = 1$. Ferner ist (X_t) eine kausale Funktion von (Y_t) , wenn $\varrho(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$.

39. Sei (X_t) ein ARMA-Prozess mit $\varrho(z) \neq 0$, $|z| = 1$, und Autokovarianzfunktion $\gamma(\cdot)$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $C > 0$ und $\delta \in (0, 1)$ gibt, so dass $|\gamma(s)| \leq C\delta^{|s|}$ gilt. Insbesondere gilt dann

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(j)| < \infty.$$

40. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und \mathcal{M} ein abgeschlossener linearer Teilraum. Bezeichne I die Identität auf \mathcal{H} .

- a) Der Operator $P_{\mathcal{M}}$ ist linear und stetig und bildet \mathcal{H} auf \mathcal{M} ab, und $I - P_{\mathcal{M}}$ bildet \mathcal{H} auf \mathcal{M}^{\perp} ab.
- b) Es gilt $x \in \mathcal{M}$ genau dann, wenn $P_{\mathcal{M}}x = x$, und es gilt $x \in \mathcal{M}^{\perp}$ genau dann, wenn $P_{\mathcal{M}}x = 0$.
- c) Sind \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 abgeschlossene lineare Teilräume von \mathcal{H} , so gilt $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ genau dann, wenn $P_{\mathcal{M}_1}P_{\mathcal{M}_2} = P_{\mathcal{M}_1}$.