Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz

Sommersemester 2010

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 1
Abgabe: Dienstag, 20. April 2010, vor der Vorlesung

1. (3 Punkte) Sei Θ ein Parameterraum mit Metrik d und M_n eine Funktion, die jedem Parameter eine Zufallsvariable zuordnet. Ferner sei M eine reellwertige Funktion auf Θ. Für alle $\varepsilon > 0$ gelte

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} |M_n(\vartheta) - M(\vartheta)| = o_p(1),$$
$$\sup_{\vartheta : d(\vartheta, \vartheta_0) \geq \varepsilon} M(\vartheta) < M(\vartheta_0).$$

Dann konvergiert jede Folge $\hat{\vartheta}_n$ mit $M_n(\hat{\vartheta}_n) \geq M_n(\vartheta_0) - o_p(1)$ in Wahrscheinlichkeit gegen ϑ_0.

2. (3 Punkte) Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{B}$ mit Lebesgue-Dichte. Berechnen Sie das M-Funktional und einen M-Schätzer für $\psi_\vartheta(x) = |x - \vartheta|$.

3. (6 Punkte) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f_ϑ. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ in den folgenden Fällen:

a) f_ϑ ist die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $(\vartheta, 2\vartheta)$ mit $\vartheta > 0$.

b) f_ϑ ist die Zähldichte der Poisson-Verteilung mit Parameter $\vartheta > 0$.

c) f_ϑ ist die Dichte der $N_{\vartheta,\vartheta^2}$-Verteilung mit $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f_ϑ. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ in den folgenden Fällen:

a) $f_\vartheta(x) = \sigma^{-1} e^{-(x-a)/\sigma} 1_{(a,\infty)}(x)$ mit $\vartheta = (a, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

b) $f_\vartheta(x) = \beta a^\beta x^{-(\beta+1)} 1_{(a,\infty)}(x)$ mit $\vartheta = (a, \beta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.

5. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $\vartheta f(\vartheta x)$, wobei f eine stetig differenzierbare Lebesgue-Dichte auf $(0, \infty)$ oder symmetrisch um 0 und $\vartheta > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Zeigen Sie, dass die Likelihood-Funktion eine eindeutige Nullstelle besitzt, wenn $xf'(x)/f(x)$ für $x > 0$ streng monoton wachsend ist. Weisen Sie nach, dass diese Bedingung erfüllt ist, wenn $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ die Dichte der Cauchy-Verteilung ist.