Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Sommersemester 2010**

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 11
Abgabe: Dienstag, 13. Juli 2010, vor der Vorlesung

51. Sei $\varkappa$ ein m-dimensionales Funktional und $\hat{\varkappa}$ asymptotisch linear für $\varkappa$ in a. Hat $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ stetige partielle Ableitungen in $\varkappa(a)$, dann ist $\varrho(\hat{\varkappa})$ asymptotisch linear für $\varrho(\varkappa)$ in a.

52. Sei P_{na}, $a \in A$, lokal asymptotisch normal in a, $\varkappa : A \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a und $\hat{\varkappa}$ regulär und effizient für $\varkappa$ in a. Hat $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ stetige partielle Ableitungen in $\varkappa(a)$, dann ist $\varrho(\hat{\varkappa})$ regulär und effizient für $\varrho(\varkappa)$ in a.

53. Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{B}$ mit endlichem vierten Moment. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $\varkappa(P)$ das zweite Moment von P. Zeigen Sie, dass $\varkappa$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie den (kanonischen) Gradienten und einen effizienten Schätzer für $\varkappa$.

54. Sei $T_1, \dots, T_m$ eine Gruppe messbarer Transformationen auf Ω. Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{F}$, die unter $T_1, \dots, T_m$ invariant sind. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P, den kanonischen Gradienten von $\varkappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf.

55. Sei $\mathcal{P}$ gegeben durch

$$\mathcal{P} = \{P \text{ auf } \mathbb{R}^2 : \gamma_u(P) = 0 \ \forall u \in U\}$$

mit

$$\gamma_u(P) := \iint u_1(x)u_2(y)P(dx,dy) - \int u_1(x)P(dx,dy) \int u_2(y)P(dx,dy)$$

und $U := \{u : u(x,y) = u_1(x)u_2(y), u_i \in C_i\}$, wobei $C_i := \{1_B : B \in \mathcal{B}\}$. Sei $f \in L_2(P)$. Berechnen Sie den kanonischen Gradienten für das Funktional $\varkappa(P) = Pf$ und geben Sie einen regulären und effizienten Schätzer für Pf an.