Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2010/11**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 5

Abgabe: Dienstag, 16. November 2010, nach der Vorlesung

21. Sei Ω ein Grundraum, P ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf und $A_1, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse aus Ω. Zeigen Sie, dass dann auch die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n$ mit $B_i \in \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$ unabhängig sind.

22. Es gibt Leitungen zwischen den Orten 2 und 3 und von jedem dieser Orte zu den Orten 1 und 4. Jede dieser Leitungen wird unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p gestört. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man noch eine Nachricht von 1 nach 4 übermitteln?

23. Sei n eine natürliche Zahl mit Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Sei $\varphi(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen bis n, die teilerfremd zu n sind. Beweisen Sie mit stochastischen Methoden die Formel

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

Hinweis: Wie hängt die gesuchte Größe mit den Ereignissen $A_j := \{m \leq n : p_j | m\}$ zusammen?
Bemerkung: Die Funktion φ wird auch *Eulersche Phi-Funktion* genannt. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

24. (*Bubblesort*) Ein Feld der Länge n enthalte die Elemente $1, \ldots, n$ in beliebiger Reihenfolge. Sie sollen der Größe nach sortiert werden. Dazu wird im ersten Schritt das zweite Element mit dem ersten verglichen; wenn nötig, werden beide vertauscht. Allgemein wird im $(k-1)$-ten Schritt das k-te Element mit dem $(k-1)$-ten verglichen und ggf. vertauscht. Hat man alle Elemente durchlaufen, so wiederholt man das Verfahren, bis die Elemente sortiert sind. Berechnen Sie für $n = 3$ die erwartete Anzahl der *Vertauschungen*, also der Schritte, bei denen das Element tatsächlich seinen Platz mit dem des Nachbarn tauscht.

25. Gegeben sei eine σ-Algebra $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass diese abgeschlossen ist unter Differenzen, symmetrischen Differenzen, abzählbaren Durchschnitten und endlichen Vereinigungen und Durchschnitten.

Heiteres aus der Stochastik:

Ein Statistiker wird gefragt, wo er begraben werden will.
Seine Antwort: „In Jerusalem, da ist die Auferstehungswahrscheinlichkeit am größten."