Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2010/11**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 10
Abgabe: Dienstag, 21. Dezember 2010, vor der Vorlesung

46. Seien X_i, $i = 1, \dots, n$, unabhängig und gleichverteilt auf $\big(\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}\big)$. Zeigen Sie, dass

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{2}\Big(\max_{1 \le i \le n} X_i + \min_{1 \le i \le n} X_i\Big)$$

erwartungstreue Schätzer für $t(\vartheta) = \vartheta$ sind. Sind die Schätzer konsistent?
Hinweis: Beachten Sie die Verteilungssymmetrie der X_i.

47. Sei X verteilt gemäß

$$P(X = n) = \frac{\vartheta^n}{n!(e^{\vartheta} - 1)}\ , n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Der einzige erwartungstreue Schätzer für $t(P^X) = 1 - e^{-\vartheta}$ ist der Schätzer $T(n) = 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dieser liefert jedoch unsinnige Schätzwerte.

48. Seien $(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteilte zweidimensionale Zufallsvektoren mit endlichen vierten Momenten $E(X_1^4)$, $E(Y_1^4)$. Dann ist

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

ein konsistenter Schätzer für die Kovarianz von X und Y. Bestimmen Sie außerdem seine Einflussfunktion und seine asymptotische Varianz.

49. Je 10 Messungen der Winkel α, β, γ eines Dreiecks ergeben folgende Mittelwerte:

$$\bar{\alpha} = 61,3^\circ, \bar{\beta} = 44,6^\circ, \bar{\gamma} = 73,4^\circ.$$

Die Winkelsumme ist aufgrund der Messfehler nicht 180°. Man bestimme mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate Schätzungen $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ mit Winkelsumme 180°.
Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

50. Sei $\hat{b}$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer im eindimensionalen Regressionsmodell

$$Y = bX + \varepsilon \quad \text{mit } E\varepsilon = 0,\ b \in \mathbb{R} \text{ und } X_i, \varepsilon_i \text{ unabhängig.}$$

Gilt $EX^4 < \infty$ und $E\varepsilon^4 < \infty$, dann ist

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{b}X_i)^2$$

ein konsistenter Schätzer für die Varianz σ^2 von ε. Bestimmen Sie außerdem seine Einflussfunktion und seine asymptotische Varianz.

Heiteres aus der Stochastik:

Ein Mensch, der von Statistik hört,
denkt dabei nur an Mittelwert.
Er glaubt nicht dran und ist dagegen,
ein Beispiel soll es gleich belegen:
Ein Jäger auf der Entenjagd
hat einen ersten Schuss gewagt.
Der Schuss, zu hastig aus dem Rohr,
lag eine gute Handbreit vor.
Der zweite Schuss mit lautem Krach
lag eine gute Handbreit nach.
Der Jäger spricht ganz unbeschwert
voll Glauben an den Mittelwert:
Statistisch ist die Ente tot.
Doch wär er klug und nähme Schrot
- dies sei gesagt, ihn zu bekehren -
er würde seine Chancen mehren:
Der Schuss geht ab, die Ente stürzt,
weil Streuung ihr das Leben kürzt.