Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2011**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 1
Abgabe: Dienstag, 12. April 2011, vor der Vorlesung

1. a) Berechnen Sie $(\liminf A_n)^c$ und $(\limsup A_n)^c$.
b) Zeigen Sie, dass gilt $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
c) Wenn $A_n \uparrow A$ oder $A_n \downarrow A$, dann gilt $\liminf A_n = \limsup A_n = A$.
d) Berechnen Sie $\liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$ und $\limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$.

2. Berechnen Sie jeweils $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$, wenn
a) $A_n = (-1/n, 1]$ für ungerades n und $A_n = (-1, 1/n]$ für gerades n.
b) A_n das Innere der offenen Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $\left(\frac{1}{n}(-1)^n, 0\right)$ ist.

3. a) Sei Ω überabzählbar. Dann ist

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega :\ A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra.
b) Zeigen Sie, dass die σ-Algebra $\mathcal{F}$ aus a) vom System $\mathcal{E}$ der endlichen Teilmengen von Ω erzeugt wird, d.h. es gilt $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$.

4. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{A}_n$ die vom System $\mathcal{E}_n = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ in $\Omega := \mathbb{N}$ erzeugte σ-Algebra.
a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathcal{A}_n = \{A \subset \mathbb{N} :\ A \subset \{1, \dots, n\} \text{ oder } \{n+1, n+2, \dots\} \subset A\}.$$

b) Beweisen Sie: $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
c) Warum ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ keine σ-Algebra in $\Omega = \mathbb{N}$?

5. Sei μ eine nichtnegative und additive Mengenfunktion auf einer Algebra $\mathcal{F}$. Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjunkt mit $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\mu \sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n.$$