Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2011**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 4
Abgabe: Dienstag, 3. Mai 2011, vor der Vorlesung

16. Es sei V ein Vektorraum von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
(a) Jeder Limes einer wachsenden Folge von Funktionen aus V liegt in V.
(b) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liegt in V.
Dann enthält V alle Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

17. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ aufsteigend. Dann ist $\varphi : ([0,\infty), \mathcal{B} \cap [0,\infty)) \to ([0,\infty), \mathcal{B} \cap [0,\infty))$ messbar. Für eine Borel-messbare Funktion f und $a \geq 0$ mit $\varphi(a) > 0$ gilt zudem

$$\mu(|f| \geq a) \leq \frac{1}{\varphi(a)}\, \mu(\varphi \circ |f|).$$

18. Definition 1: Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt eine *μ-Nullmenge*, wenn $N \in \mathcal{F}$ und $\mu(N) = 0$ ist.
Definition 2: Es sei E eine Eigenschaft derart, dass für jeden Punkt $\omega \in \Omega$ definiert ist, ob ω diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Wir sagen „*μ-fast alle Punkte $\omega \in \Omega$ besitzen die Eigenschaft E*“ oder „*E gilt μ-fast überall auf Ω*“, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass alle Punkte $\omega \in N^c$ die Eigenschaft E besitzen.
Sei nun f eine nichtnegative Borel-messbare Funktion auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mu f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

19. a) Sind $f_1, f_2, \ldots$ nichtnegativ und Borel-messbar, so gilt

$$\mu \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu f_n.$$

b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{F}$ gilt

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu A_n.$$

c) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann gilt für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{F}$

$$\limsup_{n\to\infty} \mu A_n \leq \mu(\limsup A_n).$$

20. (*Vertauschung von Differentiation und Integration*)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, I ein offenes Intervall, $t \in I$ und $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Für $s \in I$ ist $f(s, \cdot) : \omega \mapsto f(s, \omega)$ integrierbar.

b) Für $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot, \omega) : t \mapsto f(t, \omega)$ auf ganz I differenzierbar mit Ableitung $f'(\cdot, \omega)$.

c) Es existiert eine μ-integrierbare Funktion $g \geq 0$ auf Ω, so dass für alle $\omega \in \Omega$ und $s \neq t$ gilt

$$\left| \frac{f(s,\omega) - f(t,\omega)}{s - t} \right| \leq g(\omega).$$

Dann ist die Funktion $\psi(t) := \int f(t, \omega)\mu(d\omega)$ auf I differenzierbar mit Ableitung

$$\psi'(t) = \int f'(t, \omega)\mu(d\omega).$$