Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2011**

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 5
Abgabe: Dienstag, 10. Mai 2011, vor der Vorlesung

21. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Sei weiterhin $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Definiere ν als das Maß mit μ-Dichte f.

a) Beweisen Sie, dass für jede messbare Funktion $\varphi : \Omega \to [0, \infty)$ gilt

$$\nu\varphi = \mu(\varphi f).$$

b) Zeigen Sie: Eine messbare Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann ν-integrierbar, wenn φf μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt wie in a)

$$\nu\varphi = \mu(\varphi f).$$

c) Seien nun zusätzlich $g : \Omega \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion und ϱ das Maß mit ν-Dichte g. Zeigen Sie, dass dann ϱ die μ-Dichte gf besitzt.

22. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein beliebiger Maßraum. Definiere für jedes $A \in \mathcal{F}$

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

das sog. *Dirac-Maß* im Punkt ω. Seien weiterhin $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega$, $a_1, a_2, \ldots > 0$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Wann ist f bezüglich des Maßes $\mu := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta_{\omega_j}$ integrierbar? Berechnen Sie in diesem Fall das Integral $\int f \, d\mu$.

23. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum.

a) Sei μ ein σ-endliches Maß und $\bar{\mu}$ definiert durch $\bar{\mu}A := \mu(A \cap A_0)$ für ein $A_0 \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $\bar{\mu}$ eine Dichte bezüglich μ besitzt, und bestimmen Sie diese.

b) Seien μ und ν endliche Maße mit $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie, dass ν eine Dichte f bezüglich $\mu + \nu$ besitzt und dass die μ-Dichte von ν μ-fast überall gleich $\frac{f}{1-f}$ ist.

24. a) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. $\mathcal{F}$ enthalte die Einpunktmengen. Seien μ und ν diskrete Maße auf $\mathcal{F}$.

(i) Geben Sie eine zu $\nu \ll \mu$ äquivalente Bedingung an.
(ii) Berechnen Sie alle μ-Dichten von ν.

b) Seien μ und ν stetige Maße auf der Borel-Algebra $\mathcal{B}^n$ des $\mathbb{R}^n$.
(i) Geben Sie eine zu $\nu \ll \mu$ äquivalente Bedingung an.
(ii) Berechnen Sie alle μ-Dichten von ν.

Hinweise: a) Ein Maß μ heißt *diskret*, wenn es höchstens abzählbar viele $\omega_i \in \Omega$ und $p_i \in [0, \infty)$ gibt, so dass

$$\mu A = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{\omega_i}(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{F}.$$

b) Ein Maß μ heißt *stetig* mit *Dichte* a, wenn $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist mit

$$\mu A = \lambda^n(1_A a) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n.$$

25. Gegeben seien messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, und eine Funktion $f : \Omega_0 \to \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$. Die Abbildung $\pi_i : \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n \to \Omega_i$ sei die Projektion auf die i-te Komponente. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n = \sigma(\bigcup_{i=1}^n \pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i))$.

b) Die Abbildung f ist genau dann $\mathcal{F}_0$-$\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$-messbar, wenn jede der Abbildungen $\pi_i \circ f$ $\mathcal{F}_0$-$\mathcal{F}_i$-messbar ist.