Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2011

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 12
Abgabe: Dienstag, 5. Juli 2011, vor der Vorlesung

56. (5 Punkte) (*Eigenschaften von Stoppzeiten*)
a) Sind S und T Stoppzeiten, dann auch $S \vee T$, $S \wedge T$ und $S + T$.
b) Eine Stoppzeit T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.
c) Ist T eine Stoppzeit und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so ist X_T $\mathcal{F}_T$-messbar.
d) Sind S und T Stoppzeiten mit $S \leq T$, dann gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
Hinweis: $x \vee y := \max\{x, y\}$, $x \wedge y := \min\{x, y\}$.

57. (*Optional switching*) Seien $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Martingale und T eine Stoppzeit, und es gelte $X_T = Y_T$, wenn $T < \infty$. Definiere

$$Z_n = \begin{cases} X_n & , n < T \\ Y_n & , n \geq T. \end{cases}$$

(*Interpretation:* Zum Zeitpunkt T setzen Sie sich mit Ihren bisher gewonnenen Chips an einen anderen Spieltisch.) Dann ist $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal.

58. Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert m, und sei $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Zeigen Sie:

a) Wenn T eine endliche Stoppzeit bzgl. der von den X_k erzeugten Filtration ist und $Y_k \geq 0$ für alle k, dann gilt $E[X_T] = mET$.

b) Wenn T eine endliche Stoppzeit bzgl. der von den X_k erzeugten Filtration mit $ET < \infty$ ist, dann gilt $E[X_T] = mET$.

c) Wenn T eine positive ganzzahlige Zufallsvariable ist, die unabhängig von $(Y_1, Y_2, \ldots)$, aber nicht notwendig eine Stoppzeit ist, dann gelten die Aussagen von a) und b) weiterhin.

Hinweis zu a): Betrachten Sie die Stoppzeiten $T_n = T \wedge n$.

59. Ursprünglich bedeutet „Martingal" folgende Strategie (auch Petersburger Strategie genannt): Sie verdoppeln bei jedem Spiel den Einsatz und hören auf, wenn Sie das erste Mal gewinnen. – Für ein faires Spiel gilt:

a) Am Schluss haben Sie Ihren Einsatz verdoppelt. (Der Satz über optional sampling gilt also *nicht*.)

b) Ihr Vermögen ist ein Martingal.

c) Die Stoppzeit ist geometrisch verteilt.

d) Der Erwartungswert Ihres Einsatzes bis zum letzten Spiel ist *unendlich*. (Sie benötigen also ein hohes Startkapital.)

60. (3 Punkte) Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer, unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert Eins. Seien $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Ist $X_0 = 1$ und $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$, dann ist $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $(\sqrt{X_n}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal. Falls $\prod_{k=1}^\infty E[\sqrt{Y_k}] = 0$, dann konvergiert $(\sqrt{X_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ f.s. Wie lautet der Grenzwert?