Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2011**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 13
Abgabe: Dienstag, 12. Juli 2011, vor der Vorlesung

Alle Punkte auf diesem Übungsblatt sind **Bonuspunkte**!

61. (Ein Null-Eins-Gesetz) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Konstanten dergestalt, dass $c_n X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, punktweise für alle ω aus einer Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit. Beweisen Sie: $c_n X_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ f.s.

62. Berechnen Sie für eine reellwertige Funktion f auf $[0,1]$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \overset{n}{\cdots} \int_0^1 f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

63. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X_n $N(\mu, \frac{1}{n})$-verteilt. Zudem sei Z eine Zufallsvariable mit $P^Z = \delta_\mu$. Zeigen Sie $X_n \Rightarrow Z$

(a) mit Hilfe der Verteilungsfunktionen und

(b) mit Hilfe der charakteristischen Funktionen.

64. (3 Punkte) Ist φ eine charakteristische Funktion, dann auch $|\varphi|^2$.

65. (5 Punkte) (*Quadratintegrierbare Martingale*) Sei $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $E(X_n^2) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) $(X_n^2, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Submartingal.

(ii) $E(X_n^2)$ wächst in n.

(iii) $E(X_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n^2$.

(iv) $E((X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n)$.

(v) Setze $A_0 = 0$ und $A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n)$. Dann ist A_{n+1} $\mathcal{F}_n$-messbar und nichtfallend in n und $(X_n^2 - A_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal. (A_n heißt *Kompensator* von X_n^2.)

Erinnerung: Die Anmeldefrist für die Klausur endet am 12. Juli 2011.