Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2012

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 2
Abgabe: Dienstag, 17. April 2012, vor der Vorlesung

5. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und auf dem Intervall $(0, \vartheta)$ gleichverteilt; $\vartheta > 0$ sei unbekannt.
Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}$ und zeigen Sie, dass er stochastisch gegen ϑ konvergiert. Wie ist $n(\vartheta - \hat{\vartheta})$ asymptotisch verteilt?

6. a) Sei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ messbar und $\hat{\vartheta}$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für $\vartheta \in \Theta$. Setze $\Theta_\eta := \{\vartheta \in \Theta : g(\vartheta) = \eta\}$ und $M(\eta) := \sup_{\vartheta \in \Theta_\eta} \ell(\vartheta)$ für $\eta \in g(\Theta)$. Dann wird $M(\eta)$ in $\hat{\eta} = g(\hat{\vartheta})$ maximal.
b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ $N_{\mu,1}$-verteilte Beobachtungen mit unbekanntem μ. Anstatt der Beobachtungen notieren wir jedoch nur, ob die Beobachtungen kleiner als Null sind. Bestimmen Sie hiermit einen Maximum-Likelihood-Schätzer für μ.

7. Seien $(Y_1, Z_1), \ldots, (Y_n, Z_n)$ unabhängige und identisch verteilte zweidimensionale Zufallsvektoren, so dass Y_1 und Z_1 unabhängig und exponentialverteilt sind mit Parametern $\lambda > 0$ bzw. $\mu > 0$.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer von (λ, μ).

b) Angenommen wir beobachten nur $X_i = \min\{Y_i, Z_i\}$ und Δ_i mit

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 & , Y_i \leq Z_i \\ 0 & , Y_i > Z_i \end{cases}.$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer von (λ, μ).

Hinweis: Maximieren Sie in b) die Likelihood-Funktion

$$\ell(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial P(X_i \leq x_i, \Delta_i = d_i)}{\partial x_i}, \; d_i \in \{0, 1\}.$$

8. Sei X ein Zufallsvektor mit positiv definiter Kovarianzmatrix, dessen Komponenten alle den gleichen Erwartungswert haben. Dann erhält man einen Schätzer als Konvexkombination der Schätzer der Erwartungswerte. Benutzen Sie diesen Ansatz, um einen Schätzer für den Erwartungswert zu bestimmen, der eine möglichst kleine (asymptotische) Varianz besitzt. Wie ist er asymptotisch verteilt?