Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2012**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 5
Abgabe: Dienstag, 8. Mai 2012, vor der Vorlesung

17. a) Für einen Kern $K \geq 0$ sei $\mu_j(K) := \int u^j K(u) du$, $\mu_{2p}(K) < \infty$ und $\int |u|^{2p+1} K(u) du < \infty$. N_p sei die $(p+1) \times (p+1)$-Matrix mit Einträgen $(N_p)_{i,j} = \mu_{i+j-2}(K)$, $i, j = 1, \dots, p+1$. Die $(p+1) \times (p+1)$-Matrix $M_p(u)$ entstehe aus N_p, indem man die erste Spalte durch $(1, u, \dots, u^p)^\top$ ersetzt. Dann gilt: Wenn p ungerade ist, so ist

$$K_{(p)}(u) = \frac{\det(M_p(u))}{\det(N_p)} K(u)$$

ein Kern aus $\mathcal{K}_{p,1}$.
b) Sei K ein symmetrischer und auf $\mathbb{R}$ differenzierbarer Kern aus $\mathcal{K}_{1,1}$ mit $\int u^4 |K(u)| du < \infty$. Dann ist

$$\tilde{K}(u) = \frac{3}{2} K(u) + \frac{1}{2} u K'(u)$$

ein Kern aus $\mathcal{K}_{3,1}$.

18. Sei f eine Dichte auf $\mathbb{R}$ mit einem Sprung in x. Wogegen konvergiert der Kernschätzer $\hat{f}(x)$ stochastisch?

19. Sei f eine Dichte auf $\mathbb{R}$, die in 0 einen Sprung hat. Wie können Sie die Sprunghöhe schätzen? (Das Problem wird wesentlich schwieriger, wenn nicht bekannt ist, wo sich der Sprung befindet – selbst wenn bekannt ist, dass es nur einen Sprung gibt.)

20. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Verteilungsfunktion F und zugehöriger stetiger Lebesgue-Dichte f. Setze

$$f_n(x) = \frac{\mathbb{F}_n(x+b) - \mathbb{F}_n(x-b)}{2b},$$

wobei $\mathbb{F}_n$ die empirische Verteilungsfunktion und $b = b_n$ eine Nullfolge mit $b_n > 0$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass f_n eine Lebesgue-Dichte auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Sei f stetig differenzierbar in t, $b \to 0$ und $nb \to \infty$. Bestimmen Sie den mittleren quadratischen Fehler.

c) Unter den Voraussetzungen aus b) und $nb^3 \to 0$ gilt

$$\sqrt{nb}(f_n(t) - f(t)) \Rightarrow N_{0,f(t)/2}.$$