Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2012

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 7
Abgabe: Dienstag, 22. Mai 2012, vor der Vorlesung

25. Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte f. Sei f_1 die Dichte von X und $r(x) = E(Y|X = x)$ die Regressionsfunktion von Y auf X. Definiere den Nadaraya-Watson-Schätzer

$$\hat{r}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K_b(x - X_i)}{\sum_{i=1}^{n} K_b(x - X_i)}.$$

Berechnen Sie unter geeigneten Bedingungen die Konvergenzrate von $\hat{r}(x)$.

26. Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit zweimal stetig differenzierbarer Regressionsfunktion g. Die zweite Ableitung von g sei beschränkt. Ferner besitze X die Dichte f. Um die Regressionsfunktion zu schätzen, wählen wir einen symmetrischen beschränkten Kern $K \geq 0$ mit Träger $[-1, 1]$ und $\int u^6 K(u)du < \infty$.
a) Bestimmen Sie explizit den lokalen polynomialen Glätter $\hat{g}_1(x)$ der Ordnung $r = 1$ (sog. *lokaler linearer Glätter*).
b) Zeigen Sie, dass für $k = 0, 1, 2, 3$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - x)^k K_b(x - X_i) = b^k f(x) \int_{-1}^{1} u^k K(u)du + o_p(b^j).$$

27. Formulieren Sie analoge Aussagen zu den Sätzen 26 und 27 für das Minimum $X_{1:n}$. Beweisen Sie diese wie in der Vorlesung.

28. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit stetiger Dichte $f > 0$ und Verteilungsfunktion F. Zudem existiere ein $\alpha > 0$, so dass gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{1 - F(x)} = \alpha.$$

Für $x^*_{rn} = F^{-1}\big(1 - \frac{1}{n}\big)$ gilt dann

$$P\left(\frac{X_{n:n}}{x^*_{rn}} \leq t\right) \to \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}.$$