

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 11

Abgabe: Dienstag, 26. Juni 2012, vor der Vorlesung

Eine Abbildung $s \mapsto a_s$ von \mathbb{R} nach $L_p(P)$ heißt $L_p(P)$ -differenzierbar in t mit Ableitung \dot{a} , wenn

$$\|a_s - a_t - (s - t)\dot{a}\|_p = o(|s - t|).$$

Eine Abbildung $s \mapsto f_s$ von \mathbb{R} in die Dichten auf \mathbb{R} heißt Hellinger-differenzierbar in t mit Ableitung \dot{a} , wenn

$$\lambda\left(f_s^{1/2} - f_t^{1/2} - \frac{1}{2}(s - t)\dot{a}f_t^{1/2}\right)^2 = o((s - t)^2).$$

41. Ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_2(f_t)$ -differenzierbar in t , so ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar mit derselben Ableitung.

Hinweis: $f_s - f_t = (f_s^{1/2} - f_t^{1/2})(f_s^{1/2} + f_t^{1/2})$.

42. Ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar in t , so ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_1(f_t)$ -differenzierbar mit derselben Ableitung.

43. Für jedes ϑ aus einer offenen Teilmenge Θ von \mathbb{R} sei p_ϑ eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzgl. des Lebesgue-Maßes. Die Abbildung $\vartheta \mapsto \sqrt{p_\vartheta(x)}$ sei stetig differenzierbar für alle x . Wenn $I_\vartheta = \int (\dot{p}_\vartheta/p_\vartheta)^2 p_\vartheta d\lambda$ wohldefiniert und als Funktion von ϑ stetig ist, dann ist $\vartheta \mapsto p_\vartheta$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_\vartheta = \dot{p}_\vartheta/p_\vartheta$.

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Aussage (Beweis!):

Seien f_n und f messbare Funktionen mit $f_n \rightarrow f$ μ -f. ü. und $\limsup \int |f_n|^2 d\mu \leq \int |f|^2 d\mu < \infty$ für ein Maß μ . Dann gilt $\int |f_n - f|^2 d\mu \rightarrow 0$.

44. a) Zeigen Sie, dass die Lageparameter-Familie P_ϑ , $\vartheta \in \mathbb{R}$, mit Lebesgue-Dichten

$$p_\vartheta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\vartheta|}$$

in jedem Punkt $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_{\vartheta_0}(x) = \text{sgn}(x - \vartheta_0)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Familie der Dichten der Gleichverteilung auf $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, nirgendwo Hellinger-differenzierbar ist.