

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 12

Abgabe: Dienstag, 3. Juli 2012, vor der Vorlesung

45. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig mit Verteilung P_ϑ , $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Sei $\kappa : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in ϑ . Zeigen Sie:

- Ist $\hat{\vartheta}$ regulär in ϑ mit Limes V , so ist $\kappa(\hat{\vartheta})$ regulär für κ in ϑ mit Limes $\kappa'(\vartheta)V$.
- Ist $\hat{\vartheta}$ asymptotisch linear in ϑ mit Einflussfunktion h , so ist $\kappa(\hat{\vartheta})$ asymptotisch linear für κ in ϑ mit Einflussfunktion $\kappa'(\vartheta)h$.

46. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig N_{ϑ, σ^2} -verteilt mit bekannter Varianz σ^2 .

- Zeigen Sie, dass die Familie $(N_{\vartheta, \sigma^2})_{\vartheta \in \mathbb{R}}$ Hellinger-differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.
- Bestimmen Sie einen regulären und effizienten Schätzer für $E[X_1^3]$.
- Seien nun X_1, \dots, X_n unabhängig $N(\vartheta, I)$ -verteilt mit $\vartheta \in \mathbb{R}^3$ und der Einheitsmatrix I . Dann ist der Schätzer

$$\hat{\vartheta} = \left(1 - \frac{1}{n|\bar{X}_n|^2}\right) \bar{X}_n$$

von ϑ in 0 nicht regulär.

Hinweis: Ist das Modell lokal asymptotisch normal (LAN), κ ein in ϑ stetig differenzierbares Funktional und $\hat{\vartheta}$ regulär und effizient in ϑ , so ist $\kappa(\hat{\vartheta})$ regulär und effizient für κ in ϑ .

47. Sei T_1, \dots, T_m eine Gruppe messbarer Transformationen auf Ω . Sei \mathcal{P} die Familie der Verteilungen auf \mathcal{F} , die unter T_1, \dots, T_m invariant sind. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P , den kanonischen Gradienten von $\varkappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf .

48. Sei \mathcal{P} gegeben durch

$$\mathcal{P} = \{P \text{ auf } \mathbb{R}^2 : P = P_1 \otimes P_2\}.$$

Berechnen Sie den kanonischen Gradienten für das Funktional $\varkappa(P) = Pf$ und geben Sie einen regulären und effizienten Schätzer für Pf an.