Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Wintersemester 2012/13**

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 1

Abgabe bis 19.10., 14.00 Uhr, in die Übungsfächer

1 Wir betrachten auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zwei neue Verknüpfungen:

$$a \oplus b := a + b + 1 \quad \text{und} \quad a \odot b := ab + a + b.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ ein Körper ist. Welche Elemente aus $\mathbb{Q}$ spielen die Rolle der Null $\mathbf{0}$ und der Eins $\mathbf{1}$ für die neuen Verknüpfungen? Wie findet man das Inverse eines Elementes $a \neq 0$?
b) Berechnen Sie auch die Elemente $\mathbf{2} := \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$, $\mathbf{3} := \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$ usw. Welchen Verdacht haben Sie?

Analog zur Definition einer oberen Schranke einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ sagt man, dass ein Wert t eine *untere Schranke* der Menge A ist, wenn für alle $a \in A$ die Ungleichung $t \leq a$ gilt. Die größte untere Schranke einer Menge A (sofern sie existiert) bezeichnet man dann als das *Infimum* $\inf A$.

2 a) Es sei M eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen. Wir definieren

$$-M := \{-a | a \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass $-M$ genau dann ein Supremum hat, wenn M ein Infimum hat. Im Falle der Existenz gilt

$$\sup(-M) = -\inf M.$$

b) Seien A und B nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $A \subset B \;\Rightarrow\; \sup A \leq \sup B$,

(ii) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$, wobei $\max(a, b)$ die größere der beiden Zahlen a und b bezeichnet.

Bemerkung: Entsprechende Aussagen für die Infima folgen mit 2a).

3 Zeigen Sie:

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$.

b) Für $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt: $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2$.

4 a) Zeigen Sie, dass eine beliebige Vereinigung offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ wieder offen in $\mathbb{R}$ ist.
b) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist auch der Schnitt $\bigcap_{i=1}^n A_i$ all dieser Mengen eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Finden Sie unendlich viele offene Mengen $A_1, A_2, \ldots$, so dass $\bigcap_i A_i$ *nicht* offen ist.
c) Untersuchen Sie alle Intervalle auf Offenheit in $\mathbb{R}$.

Lustiges aus der Mathematik:
Behauptung: Alle natürlichen Zahlen sind interessant.
Beweis: Eins ist die erste natürliche Zahl, also als solche interessant, also ist die Menge der interessanten Zahlen nicht leer.
Annahme: Es gibt eine Menge uninteressanter Zahlen. Dann gibt es eine kleinste uninteressante Zahl, da die Menge der natürlichen Zahlen wohlgeordnet ist (Jede Teilmenge besitzt ein kleinstes Element). Diese ist als solche natürlich hochinteressant; Widerspruch!