Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2012/13**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 2

Abgabe bis 26.10., 14.00 Uhr, in die Übungsfächer

5. (6 Punkte) a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\frac{3+5i}{7i+1} \quad , \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2001}.$$

b) Bestimmen Sie den Betrag und die konjugiert-komplexe Zahl von

$$(2+i)(3+i) \quad \text{und} \quad \frac{3-i}{\sqrt{2}+3i}.$$

c) Zeichnen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1, -1 \leq \mathrm{Im} z \leq 1\}$.

6. Untersuchen Sie die folgenden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$,

b) $a_n = nx - [nx]$, wobei $x \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $[x]$ die Gauß-Klammer von x bezeichnet,

c) $a_n = \left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)^8$,

d) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+n+1}$,

e) $a_n = n^{(-1)^n(1+(-1)^{n+1})}$.

7. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen, $a, b \in \mathbb{R}$ und es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie:

a) Ist $a = 0$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Zahlenfolge, so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = 0.$$

b) Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $a = b$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

8. (4 Punkte) Geben Sie alle Punkte aus $\mathbb{C}$ an, die Grenzwert einer Teilfolge der komplexen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := i^n + \frac{1}{2^n}$$

sind.

Lustiges aus der Mathematik:
„Die Nummer, die Sie gewählt haben, ist imaginär. Bitte drehen Sie Ihr Telefon um 90 Grad und probieren Sie es erneut!“

Auf Löwenjagd in der Wüste (I):
Die Bolzano-Weierstraß-Methode
Wir halbieren die Wüste in Nord-Süd Richtung durch einen Zaun. Dann ist der Löwe entweder in der westlichen oder östlichen Hälfte der Wüste. Wir wollen annehmen, dass er in der westlichen Hälfte ist. Daraufhin halbieren wir diesen westlichen Teil durch einen Zaun in Ost-West Richtung. Der Löwe ist entweder im nördlichen oder im südlichen Teil. Wir nehmen an, er ist im nördlichen. Auf diese Weise fahren wir fort. Der Durchmesser der Teile, die bei dieser Halbiererei entstehen strebt gegen Null. Auf diese Weise wird der Löwe schließlich von einem Zaun beliebig kleiner Länge eingegrenzt.
Achtung: Bei dieser Methode achte man darauf, dass das schöne Fell des Löwen nicht beschädigt wird.