Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Wintersemester 2012/13

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 4

Abgabe bis 9.11., 14.00 Uhr, in die Übungsfächer

13. a) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass es ein $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ gibt, so dass

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

b) Zeigen Sie mit den Methoden aus Kapitel 2 der Vorlesung (ohne Beispiel 1.4.21), dass es im Intervall $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ eine reelle Zahl a gibt mit $a^2 = 2$.

14. a) Eine Funktion f heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.
b) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit:

(i) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

(ii) $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

15. Untersuchen Sie, welche der folgenden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen an der Stelle 0 differenzierbar sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die jeweilige Ableitung an der Stelle:

(i) $f_1(x) = \sqrt{|x|}$;

(ii) $f_2(x) = |x|^{3/2}$;

(iii) $f_3(x) = \begin{cases} 1 + x & , \text{ falls } x < 0 \\ \exp(x) & , \text{ falls } x \geq 0 \end{cases}$;

(iv) $f_4(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

16. Beweisen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:
a) Satz 3.1.13 der Vorlesung (Leibnizsche Regel):

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)};$$

b) Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.13 gilt:

$$f \cdot g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g\right)^{(n-k)}.$$

Hinweis zu b): Für differenzierbare Funktionen u und v gilt $uv' = (uv)' - u'v$.

Heiteres aus der Mathematik:

Mathematiker sterben nicht, sie verlieren nur einige ihrer Funktionen!

Auf Löwenjadg in der Wüste (II):
Die Banachsche oder iterative Methode
Es sei f eine Kontraktion (d.h. es existiert ein $q \in]0,1[$ mit $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ für alle x und y aus dem Definitionsbereich von f) der Wüste in sich mit Fixpunkt x_0. Auf diesen Fixpunkt stellen wir den Käfig. Durch sukzessive Iteration $W(n+1) = f(W(n))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ($W(0) =$ Wüste) wird die Wüste auf den Fixpunkt zusammengezogen. So gelangt der Löwe in den Käfig.