

**Übungen zur Mathematik I**  
für Physiker und Lehramtsstudierende  
**Serie 5**

Abgabe bis 16.11., 14.00 Uhr, in die Übungsfächer

**17. (4 Punkte)** Seien  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ,  $a \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Beweisen Sie: Ist  $f$  stetig auf  $D$  und differenzierbar auf  $D \setminus \{a\}$ , und gilt außerdem  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = v \in \mathbb{R}$ , so ist  $f$  differenzierbar in  $a$  mit  $f'(a) = v$ .

**18. a)** Ein Unternehmer will ins Eintopfgeschäft einsteigen. Seine *Erbsensuppe-Spezial* soll in zylindrischen Blechdosen (von vorgegebener Blechstärke) mit dem Volumen  $V$  verkauft werden. Welche Maße müssen die Dosen haben, damit der Materialaufwand minimal wird?

**b)** Hans Raser will sein neues Motorrad seiner Freundin Helga vorführen. Ihr Haus liegt im Abstand  $h$  von der geradlinig verlaufenden Landstraße mitten auf einer großen Wiese. Auf der Landstraße fährt Hans 100 km/h, und auf der Wiese 40 km/h. Wo muss Hans abbiegen, um möglichst schnell zu Helga zu gelangen?

**19. (6 Punkte)** Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \searrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x} - \sqrt{2}\sqrt{x^2 + 1}}; & \text{b) } \lim_{x \searrow 0} x^x; \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot (10^x - 5^x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \end{array}$$

**20.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass  $f$  streng monoton wachsend ist, und bestimmen Sie  $f(\mathbb{R})$ .

b) Wie lautet die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$ ?

- c) Wo sind  $f$  und  $f^{-1}$  stetig? Wo sind sie differenzierbar? Berechnen Sie an diesen Stellen die Ableitung.

---

### Heiteres aus der Mathematik:

Ein Physikstudent, ein Mathematikstudent, ein Medizinstudent und ein Jurastudent bekommen von ihren Professoren jeweils ein Telefonbuch vorgelegt.

Der Physikstudent: „Ich kann aus diesen Messergebnissen nicht auf den Versuch schließen und damit ist das Ergebnis zu ungenau und wertlos!“

Der Mathematikstudent: „Diese Nummern lassen sich nicht als mathematische Folge zusammenfassen, damit sind sie per Definition Definitionen und ohne Zusammenhang sind diese Definitionen wertlos.“

Der Medizinstudent schaut den Professor nur müde an und fragt: „Bis wann?“

Der Jurist dagegen ist ganz Feuer und Flamme und fragt begierig: „Dürfen wir die Gelben Seiten auch noch lernen?“