

Übungen zur Mathematik I
für Physiker und Lehramtsstudierende
Serie 7

Abgabe: 29.11., 8.00 Uhr - 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

25. Eine Funktion ϕ heißt *stückweise konstant* auf $[a, b]$, wenn eine Zerlegung (x_0, x_1, \dots, x_r) von $[a, b]$ und Zahlen c_1, c_2, \dots, c_r existieren, so dass gilt:

$$\phi(x) = c_k \quad \forall x \in]x_{k-1}, x_k[\quad (k = 1, \dots, r).$$

In den Zerlegungspunkten kann ϕ beliebig sein. Beweisen Sie:

- a) Eine stückweise konstante Funktion auf $[a, b]$ ist integrierbar.
- b) Eine Funktion f ist genau dann integrierbar auf $[a, b]$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ stückweise konstante Funktionen $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt:

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{auf } [a, b] \quad \text{und} \quad \int_a^b (\psi(x) - \phi(x)) dx < \varepsilon.$$

26. Zeigen Sie:

- a) Jede auf einem Intervall $[a, b]$ monotone Funktion ist integrierbar.
- b) Sind $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, so sind auch die folgenden Funktionen integrierbar:

$$\max\{f, g\}, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad c_1 f + c_2 g \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

27. Berechnen Sie folgende Integrale für beliebiges $y > 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^y \frac{1}{x+1} dx; & \text{b) } \int_0^y \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx; \\ \text{c) } \int_0^y \frac{1}{x^2+2x+5} dx; & \text{d) } \int_0^y \frac{x^2+x-2}{x^3+3x^2+7x+5} dx. \end{array}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich in c) an die Ableitung des Arcustangens. Bestimmen Sie in d) Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\frac{x^2+x-2}{x^3+3x^2+7x+5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}.$$

28. a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$(i) \int_1^2 x e^{\sqrt{x^2-1}} dx; \quad (ii) \int_0^y \cos(\sqrt{x}) dx.$$

b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} \ln x dx, \quad \alpha > 2$$

existiert, und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Grenzwert.

Heiteres aus der Mathematik:

Zwei Mathematiker in einer Bar: Einer sagt zum anderen, dass der Durchschnittsbürger nur wenig Ahnung von Mathematik habe. Der zweite ist damit nicht einverstanden und meint, dass doch ein gewisses Grundwissen vorhanden sei. Als der erste mal kurz austreten muss, ruft der zweite die blonde Kellnerin, und meint, dass er sie in ein paar Minuten, wenn sein Freund zurück ist, etwas fragen wird, und sie möge doch bitte auf diese Frage mit 'ein Drittel x hoch drei' antworten. Etwas unsicher bejaht die Kellnerin und wiederholt im Weggehen mehrmals: „Ein Drittel x hoch drei...“ Der Freund kommt zurück und der andere meint: „Ich werd' Dir mal zeigen, dass die meisten Menschen doch was von Mathematik verstehen. Ich frag jetzt die blonde Kellnerin da, was das Integral von x^2 ist.“ Der zweite lacht bloß und ist einverstanden. Also wird die Kellnerin gerufen und gefragt, was das Integral von x^2 sei. Diese antwortet: „Ein Drittel x hoch drei.“ Und im Weggehen dreht sie sich nochmal um und meint: „Plus c .“