Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Wintersemester 2012/13**

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 8

Abgabe: 6.12., 8.00 Uhr - 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

29. Es seien M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_n : M \to \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Abbildung. Zeigen Sie:

a) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $(\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f, so konvergiert auch die Folge $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $g \circ f$.

c) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f und ist g gleichmäßig stetig, so konvergiert auch die Folge $(g\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g\circ f$.

30. (4 Punkte) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahl $r \in [0, R[$ die Potenzreihe gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \le r\}$$

konvergiert.

31. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k}\,, n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie:

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ hat den Konvergenzradius $R = 1$ für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$ und $R =?$ für $\alpha \in \mathbb{N}$.

b) Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1 + x)^\alpha$ für alle $x \in]-R, R[$.

Hinweis zu b): Ist $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ und $g(x) := (1+x)^{\alpha}$, so gilt (?) $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ und $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$. Welchen Wert hat $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$?

32. (6 Punkte) a) Entwickeln Sie die Funktion

$$\arcsin |]-1,1[$$

innerhalb des Einheitskreises in eine Potenzreihe um 0.
b) Welchen Fehler machen wir maximal, wenn wir die Funktion $\arcsin |]-1,1[$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ durch das zweite Taylorpolynom approximieren, d.h. wie groß wird

$$|\arcsin(x) - T_2(x)|$$

maximal?

Heiteres aus der Mathematik:

Wie bringt man einen Elefanten in einen Kühlschrank?

- Analysis: Differenziere den Elefanten und bring ihn in den Kühlschrank. Dann integriere ihn im Kühlschrank.
- Zahlentheorie: Verwende vollständige Induktion: Man kann immer noch ein Stückchen mehr hineinquetschen.
- Algebra: Zeige zuerst, dass man Teile des Elefanten hineinbringen kann. Dann zeige, dass der Kühlschrank bezüglich der Addition abgeschlossen ist.
- Topologie: Bring den Elefanten dazu den Kühlschrank zu schlucken. Dann vertausche Innen und Außen.
- Numerische Analysis: Bring nur den Schwanz in den Kühlschrank und gib alles andere zum Restterm.

Auf Löwenjagd in der Wüste (IV):
Die mathematisch-zeitliche Methode
Man warte unendlich lange. Nach unendlich langer Zeit ist der Löwe tot. Wir suchen seine Gebeine und legen sie in den Käfig. (In der Problemspezifikation ist kein Wort von einem lebendigen Löwen die Rede.)