Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2012/13**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 9

Abgabe: 13.12., 8.00 Uhr - 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

33. Sei $f : G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus zwischen zwei Gruppen G_1 und G_2 mit neutralen Elementen e_1 bzw. e_2. Beweisen Sie:

a) Es gilt $f(e_1) = e_2$ und $f(b^{-1}) = (f(b))^{-1}$.

b) $\mathrm{Ker} f$ ist eine Untergruppe von G_1 und $\mathrm{Bild} f$ ist eine Untergruppe von G_2.

c) $\mathrm{Ker} f$ ist ein Normalteiler. Falls f zusätzlich noch bijektiv ist, wird auch $\mathrm{Bild} f$ zum Normalteiler.

Hinweis: In jeder Gruppe G gelten die Gleichheiten

$$ea = ae = a \quad \text{und} \quad a^{-1}a = aa^{-1} = e \quad \forall a \in G.$$

34. Sei S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

a) Beweisen Sie, dass sich jede Permutation $\pi \in S_n$ als Produkt von Transpositionen darstellen lässt. [vgl. Hilfssatz 7.1.8]

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{sign} : S_n \to \{1, -1\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn man die Menge $\{1, -1\}$ mit der üblichen Multiplikation versieht.

c) Bestimmen Sie das Signum der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_7.$$

35. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $M_1 = \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$,

b) $M_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^n x_k = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$,

c) $M_3 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$,

d) $M_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

e) $M_5 = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\right\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

36. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$;

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$;

iii) $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'$;

iv) $I : \mathcal{R}([a, b]) \to \mathbb{R},\ I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

v) $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ k(z) = \bar{z}$ über $\mathbb{C}$.

Heiteres aus der Mathematik:

O.B.d.A. heißt eigentlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Hier einige alternative Interpretationen:

Ohne Bedeutung für die Allgemeinheit
Ohne Bedenken des Autors
Offensichtlich bedingt durch Alkohol
Ohne Begründung der Annahme
Ohne Berücksichtigung der Ausnahmen
Ohne Berücksichtigung der Anfängerstudenten
Ohne Berücksichtigung der Aufgabenstellung.