Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2012/13**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 10

Abgabe: 20.12., 8.00 Uhr - 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

37. (4 Punkte) Welche der folgenden Vektoren sind linear unabhängig?

a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$;

b) $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$;

c) $1, z, z^2, \ldots, z^n$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum P_n der Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von höchstens Grad n;

d) e_1 und e_2 in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $e_n(x) = e^{nx}$, $n = 1, 2$.

38. (6 Punkte) Gegeben seien die folgenden drei Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ V &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_3\}, \\ W &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie Basen von U, V und W.

b) Zeigen Sie: $U + V = U + W = V + W = \mathbb{R}^3$. Welche der Summen sind direkt?

39. Seien U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen über K. Beweisen Sie:

a) $g \circ f : U \to W$ ist linear.

b) $\dim (g \circ f(U)) \leq \dim f(U)$;

c) In b) gilt Gleichheit genau dann, wenn $f(U) \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.

d) $\dim (g \circ f(U)) \leq \dim g(V)$;

e) In d) gilt Gleichheit geuan dann, wenn $f(U) + \operatorname{Ker} g = V$.

40. Sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in K^{(n,n)}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^m = 0$. Seien $A, B \in K^{(n,n)}$ mit $A \cdot B = B \cdot A$, und A sei nilpotent mit $A^m = 0$. Beweisen Sie:

a) $A \cdot B$ ist nilpotent.

b) $A + B$ ist nilpotent $\Leftrightarrow$ B ist nilpotent.

c) $A + E$ ist invertierbar, und es gilt $(A+E)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A^k$, wobei $A^0 := E$ gesetzt wird.

Heiteres aus der Mathematik:

Kommt ein Vektor zur Drogenberatung: „Hilfe, ich bin linear abhängig."

Auf Löwenjadg in der Wüste (V):
Die geometrische Methode
Man stelle einen zylindrischen Käfig in die Wüste:
Fall 1: Der Löwe ist innerhalb des Käfigs. Dieser Fall ist trivial.
Fall 2: Der Löwe ist außerhalb des Käfigs. Dann stelle man sich in den Käfig und führe eine Inversion an den Käfigwänden durch. So gelangt der Löwe in den Käfig und man selbst nach draußen. Man achte darauf, dass man sich nicht in die Mitte des Käfigs stellt, da man sonst im Unendlichen verschwindet.